

MARIJAN PROSEN
JURIJ VEGA IN ASTRONOMIJA

PRISPEVEK SVETOVNEMU LETU FIZIKE 2005

MARIJAN PROSEN

Posvetilo

*To publikacijo posvečam spominu na mojega prvega
in edinega mentorja, matematika, fizika
in vzornika naravoslovcev,
prof. dr. Lava Čermelja (1889-1980),
ki je veliko raziskoval tudi življenje in delo Jurija Vege.*

***Jurij Vega
in astronomija***

Keplerjeva enačba
Središčna enačba
Določitev mas Sonca in planetov Osončja

Podpornica pri izdaji knjige je
USTANOVA SLOVENSKA ZNANSTVENA FUNDACIJA

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana
52:929 Vega J.
PROSEN, Marijan
Jurij Vega in astronomija : Keplerjeva enačba, središčna enačba,
določitev mas Sonca in planetov Osončja / Marijan Prosen ; [prevod
iz nemščine (gotice) Stana Prosen, prevod povzetka v angleščino in
nemščino Maja Prosen]. - Ljubljana : Jutro, 2005. - (Svet naravoslovja)
ISBN 961-6433-46-6
218788864

VSEBINA

Uvodna misel dr. Edvarda Kobala.....	7
Izvleček in ključne besede	8
Predgovor	9
1. Uvod - naš veliki matematik, baron Jurij Vega.....	11
2. Kratka oznaka slovenske astronomije v Vegovem času.....	15
3. Masa planeta	17
4. Lega planeta. Keplerjeva enačba.....	20
5. Astronomija v učbeniku <i>Matematična predavanja</i> , 3. del.....	22
6. Razprava <i>DISQUISITIO de supputatione massarum corporum coelestium</i>	37
Povzetek.....	41
<i>Summary</i>	43
<i>Zusammenfassung</i>	44
<i>Резюме</i>	45
Literatura	46
O piscu	47

Carum rarum.

Vsaj že pet tisoč let

Vsaj že pet tisoč let imamo ljudje v mislih nebo. Privlačijo nas Sonce in številne zvezde, Luna, kometi, planeti, mrki in drugi nebesni dogodki ter pojavi. Razmišljamo o urejenosti vesolja, o menjavi dnevov in noči, o menjavi letnih časov in gibanju planetov. Za astronome, astronomske amaterje in vse vedoželjne je na nebu veliko skrivnosti. Izzivajo nas in spodbujajo k raziskovanju, odkrivanju in spoznavanju. Izzivale so Jurija Vego, ki ga predvsem poznamo kot matematika in vojaškega strokovnjaka. Izzivajo nas tudi danes, v prvem desetletju 21. stoletja, velike in male po starosti in znanju astronomije.

Želim, da bi še zlasti mladi raziskovalci iz slovenskih osnovnih in srednjih šol, ki so naredili prve korake v raziskovanju neba, spoznali s pomočjo te publikacije še eno, do sedaj manj znano »dimenzijo« našega velikega Jurija. Naj jim bo Jurij Vega vzor v spoznavanju in osvajanju znanja!

dr. Edvard Kobal,
direktor Slovenske znanstvene fundacije

Izvleček

Opisali in delno ovrednotili smo Vegove astronomske tekste, ki jih je objavil v svojem učbeniku *Matematična predavanja*, 3. del, Dunaj, 1788 (*Vorlesungen über die Mathematik*, 3. Bd.) in v delu *Razprava o izračunu mas nebesnih teles ter posebej srednjih razdalj od Sonca in obhodnih časov*, Dunaj, 1801 (*Disquisitio de supputatione massarum corporum coelestium e solis ipsorum distantiiis mediis temporibusque periodicis*).

Ključne besede

masa planeta, lega planeta, Keplerjevi zakoni, Keplerjeva enačba, središčna enačba, polarna enačba elipse, izpopolnjeni tretji Keplerjev zakon, Newtonov gravitacijski zakon

Predgovor

*Sem dolgo upal in se bal,
slovo sem upu, strahu dal*
France Prešeren

Vegove razprave, povezane z gravitacijo (oblika Zemlje in podobno), so prepuščene fizikom. V tej publikaciji je podana izključno astronomska vsebina, povezana z gibanjem planetov okrog Sonca in posledicah. Prevedeno je vse meni dosegljivo Vegovo astronomsko delo, ki leži pri meni v predalu. Tu je objavljena večina prevedenega teksta, ki sem ga včasih tudi nekoliko priredil po nekakšni zdravi kmečki logiki. Torej ne gre za dobesedni prevod.

Vegovo astronomsko delo je daleč od poljudnega značaja. J. Vega takoj začne z resno razlago v strogi matematični obliki, večinoma z navajanjem številnih enačb, v katerih se nepoznavalec hitro izgubi. Glede posredovanja Vegovega astronomskega dela širokemu krogu bralcev, da bi ga čim bolj populariziral, da torej ne bi ostalo skrito na knjižnih policah, sem se trdno držal načela: predstaviti ga moram čim bolj razumljivo, preprosto (kolikor je največ še mogoče poenostaviti, da ne bi bila okrnjena kakovost), s čim manj zapletanja itn. Želel sem prikazati oz. čim bolj ohraniti tudi veličino Vegovega matematičnega razmišljanja.

Pri Taylorjevi razvrstitvi sem včasih izpustil višje člene od kvadratnega. To pa zato, ker v končni obliki določenega matematičnega izraza v praksi večinoma zadostuje že linearni člen in celo kvadratnega zanemarimo. Zelo sem se potrudil, da bi bilo Vegovo delo prikazano pregledno in razumljivo. Nisem pisal za tri ali štiri vrhunske strokovnjake, ampak za številne ljubitelje. V ta namen sem izpustil tudi nekaj trigonometrije oz. snov priredil tako, da bi jo lahko z nekoliko večjim umskim naporom razumel že gimnazijec z dobrim znanjem matematike (trigonometrije). V prvi vrsti pač želim čim bolj popularizirati Vegov astronomski opus.

J. Vego sem poskušal obravnavati globalno, zajeti njegove bistvene poteze tudi v astronomskem razmišljanju. Opravičujem se, ker na straneh 33 in 34 nisem pisal koeficientov a_i , b_i in c_i v eksplisitni obliki kot funkcije numerične ekscentričnosti, kakor je to prikazal J. Vega, vendar sem ocenil, da to ni nujno potrebno za ohranjanje rdeče niti vsebine Vegovega dela kot celote. Prav ta del teksta sem hotel že izločiti, saj se J. Vega na tem mestu kar preveč ukvarja z matematičnimi finesami, kar v astronomski praksi ne pride v poštev.

Gre torej za smiselni prevod in zelo rahlo priredbo, tako da ostane ves čas neka bralna napetost, morda neko matematično pričakovanje v čim bolj razumljivem pripovedovanju. Seveda ne gre za pravljico. Dejansko objavljeno Vegovo astronomsko delo je precej bolj zapleteno (zahtevnejše branje), kakor je tu prikazano. Na koncu predstavitve Vegovega astronomskega dela [2] sem izpustil povzetek snovi, ker ni nujen za splošni vtis Vegovega astronomskega pisanja. Približno sedemdeset strani prevedenega Vegovega astronomskega teksta sem skrčil na peto in šesto poglavje v tej publikaciji.

V začetni fazi pisanja te publikacije mi je ogromno pomagala moja žena Stana. Naj se ji na tem mestu in v tem trenutku iz vsega srca in duše zahvalim za vso pomoč, potrpljenje, za zvrhano mero dobre volje, vztrajnosti, požrtvovalnosti, nesebičnosti, ... Tega ne bi naredila marsikatera zakonska žena. Torej mora tudi ona imeti astronomijo zelo rada.

Vse napake, ki so morebiti ostale v publikaciji kljub strokovnim pregledom recenzentov, pa gredo na moj rovaš. Temu se ni mogoče skoraj nikoli izogniti, splošnega vtisa o Vegovem astronomskem delu pa ne more prav nič zmanjšati ali okrniti.

Vega je namreč naredil za astronomijo vsekakor veliko več, kakor smo do sedaj govorili in celo več, kot pripoveduje ta publikacija.

Iskrena hvala vsem, ki ste mi pomagali pri realizaciji tega nevsakdanjega in razmeroma zelo zahtevnega projekta.

Marijan Prosen – Majo

Javornik pod Joštom nad Kranjem, 13. 3. 2005

1. Uvod – naš veliki matematik, baron Jurij Vega

Pred našo državno osamosvojitvijo leta 1991 smo imeli Slovenci štiri zelo ugledne matematike, ki so daleč zasloveli v mednarodnem znanstvenem in kulturnem svetu. To so bili Jurij Vega iz Zagorice pri Moravčah, dr. Franc vitez Močnik iz Cerknega, dr. Franc Hočevar iz Metlike in dr. Josip Plemelj iz Bleda.

Najstarejši in tudi najslavnejši med njimi je J. Vega. Bil je kmečkega stanu. Z odličnim uspehom je zaključil študije na ljubljanskem liceju. Zaradi temeljitega matematičnega znanja je bil sprejet v državno službo kot navigacijski inženir v tedanji Notranji Avstriji (regulacija reke Mure). Po petih letih je zamenjal poklic. Kot navaden vojak je stopil v vojaško službo pri topničarskem polku. Tako se zdi, da je premišljeno spremenil poklic, v katerem je lahko razmahnil svoje znanje in sposobnosti. Že po enem letu je postal podporočnik (leta 1781). Takoj nato je zasedel mesto profesorja matematike na topniški šoli na Dunaju.



Baron Jurij Vega (1754-1802)

Kmalu je ugotovil, da na šoli primanjkuje ustreznih učbenikov. Zato jih je začel sam pisati. Leta 1782 je že izdal prvi del svojih znamenitih *Matematičnih predavanj*, ki so jim nato sledili še trije deli, zadnji leta 1800.

Svetovno slavo si je Vega pridobil s sestavljanjem in izdajanjem svojih zelo natančnih logaritmovnikov, ki so jih uporabljali za različne namene, tudi in predvsem v vojski.

Veliko spoštovanje, ugled in baronstvo pa si je pridobil kot profesor na topniški šoli in zaradi številnih pomembnih vojaških uspehov na evropskih bojiščih, npr. v bojih proti Turkom pri Beogradu leta 1789, proti Prusom na Moravskem v letih od 1789 do 1792 in proti Francozom ob Renu v letih od 1793 do 1797.

V vojski je Vega hitro napredoval: 1784. nadporočnik, 1787. stotnik, 1792. major in končno 1802. podpolkovnik. Za svojo iznajdljivost, izumiteljstvo (izumil je zelo učinkovite nove možnarje) in hrabrost na številnih bojiščih je prejel tudi najvišje vojaško odlikovanje, tj. Viteški red Marije Terezije.



Slika Jurija Vege na našem bankovcu za 50 SIT. Posvečena mu je tudi poštna znamka.

Barona Jurija Vego večinoma prikazujejo kot velikega matematika in zelo sposobnega vojaka, posebno veščega topničarskih opravil. Ukvarjal pa se je tudi s fiziko, koledarjem, geodezijo, z uvedbo metrskega merskega sistema, bil je izumitelj-inovator, predvsem pa specialist za najtežje možnarje in tako eden od utemeljiteljev balistike na znanstveni osnovi.

Zelo malo pa se je do današnjega časa govorilo oz. pisalo, da se je Vega ukvarjal tudi s kraljico znanosti - astronomijo. Zadnje raziskave (namreč iz leta 2004) kažejo, da ga je ta naravoslovna veda kar precej zanimala. To je mogoče sklepati vsaj po treh Vegovih dejavnostih: 15. 6. 1787 je na Dunaju opazoval Sončev mrk [1], izčrpno je obravnaval gibanje planetov okrog Sonca [2], izračunal pa je tudi maso Sonca in planetov ter druge dinamične parametre planetov [3]. Naša raziskava prikazuje in temeljito obravnava predvsem Vegovo astronomsko delo, objavljeno v [2] in [3], v tej publikaciji pa obdelano v 5. in 6. poglavju.

J. Vega ima veliko spomenikov v Sloveniji in tudi v tujini. Prikazan je na znamki, na bankovcu za 50 SIT, na priložnostnih kovancih ob 250-letnici rojstva J. Vege, več ulic in šol pri nas se imenuje po njem. Najlepši spomenik pa ima na nebu. Po znanstveniku Vegi so leta 1837 za pomembne matematične zasluge poimenovali krater na Luni [4]. Pred

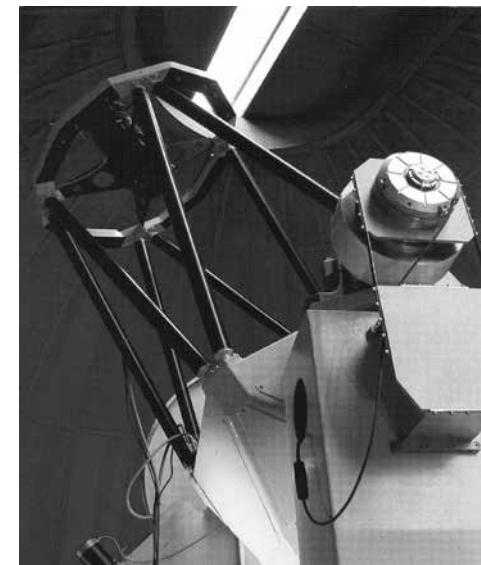


Gimnazija Jurija Vege v Idriji



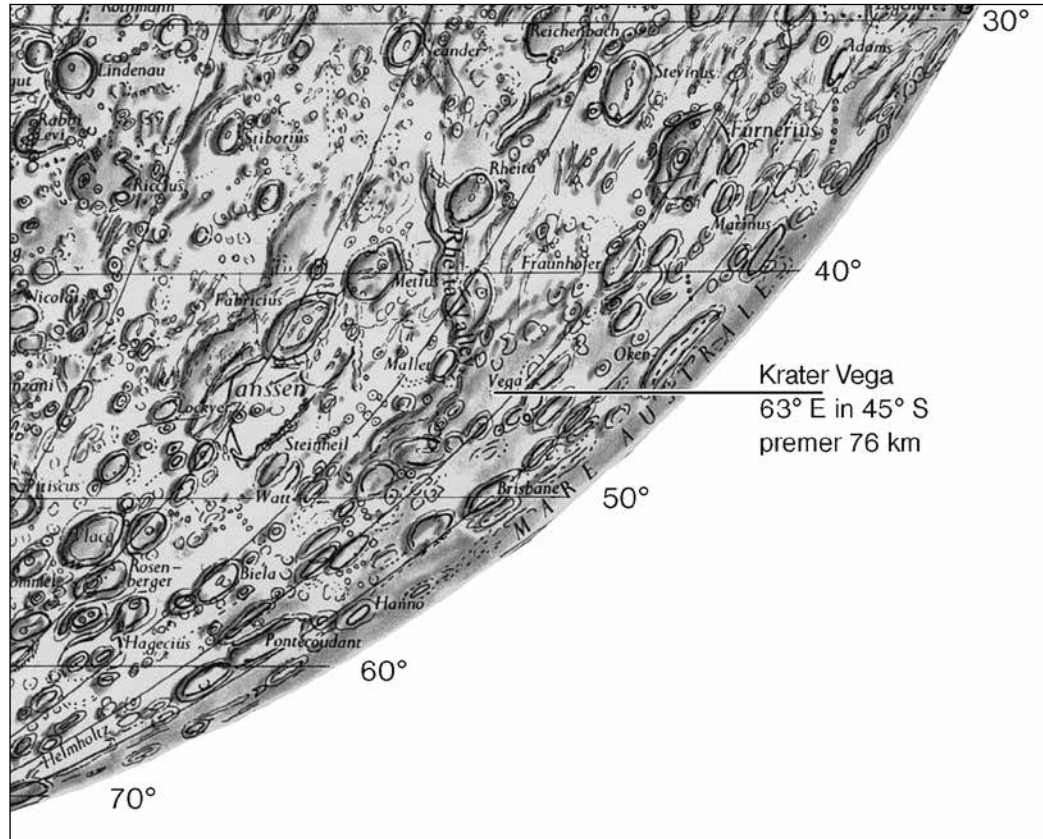
Vegova ulica v Ljubljani

nekaj leti pa so slovenski astronomi po J. Vegi imenovali tudi planetoid, tj. mali planet, ki so ga odkrili (Herman Mikuž, 30. 7. 1997, Observatorij Črni Vrh) med Marsovim in Jupitrovim tirom [5], [6]. Leta 2004 je J. Vega "dobil" tudi svoj zrcalni teleskop "Vega", ki je plod domačega znanja in dela [7].



Novi 70-cm teleskop "Vega", narejen na Univerzi v Ljubljani in postavljen v uporabo na Astronomsko geofizikalnem observatoriju na Golovcu v Ljubljani.

- Jurij Vega je bil genij, resnični enciklopedist znanja.
- Ni mu evropski znanstveni svet zamen v spomin na njegove matematične zasluge poklonil kraterja na Luni že sredi 19. stoletja.
- Skoraj v vsako stvar je vtaknil svoj radovedni raziskovalni nos. Celo v astronomijo.
- Škoda, da je tako mlad umrl.
- Zagotovo bi ustvaril še pomembna dela.



Na Lunini karti prikazana lega in velikost kraterja Vega.

2. Kratka oznaka slovenske astronomije v Vegovem času

V času Vegovega življenja je delovalo več naših astronomov na tujem, predvsem na dunajski in graški univerzi, eden celo na Kitajskem. Na ljubljanskem jezuitskem kolegiju oziroma liceju pa so poučevali naši in tuji profesorji, med njimi npr. matematik Janez Schöttl, fizika Gregor Schöttl in Anton Ambschel ter matematik Jožef Maffei de Glatfort. Zadnji trije so bili Vegovi profesorji [8], [9], [10], [11], [12]. Pri svojem poklicnem delu pa je J. Vega – kot inženir za rečno plovbo pri regulaciji Save in Ljubljane (v letih 1775 -1780) – delal pod vodstvom znamenitega hidrotehnika Gabrijela Gruberja, avtorja predlogov za regulacijo Ljubljane.

Takratni fiziki na Slovenskem so se glede astronomije večinoma ukvarjali z gnomoniko (tj. teorijo sončnih ur, gradnjo in uporabo), z vprašanji, povezanimi z zemeljsko gravitacijo, z osnovami pozicijske in sferne astronomije itn. Prispevke so pisali v latinščini, pozneje pa vse bolj v nemščini.

Za časa Vegovega življenja se je zgodilo več pomembnih astronomskih pojavov, med njimi dva navidezna prehoda Venere čez Sončev disk v letih 1761 in 1769 ter prihod svetlega kometa v prisojčje in na naše nebo leta 1769. Vse te pojave so opazovali tudi naši astronomi.¹ V tem času, leta 1781, je bil odkrit tudi sedmi planet Uran.

¹ **Avguštin Hallerstein** (Mengeš 1703 – 1774 Peking), jezuit, misijonar, matematik in astronom, predsednik astronomsko matematičnega urada v Pekingu je npr. opazoval oba Venerina prehoda in zapustil o tem tiskana poročila.

Janez Schöttl (Steyer 1724 – ?), jezuit, matematik in astronom, je prišel jeseni 1759 v Ljubljano. Tu je dne 6. 6. 1761 z velikim uspehom opazoval navidezni prehod Venere čez Sončev disk.

Gregor Schöttl (1732 Steyer, Avstrija – 1777 Ljubljana), jezuit, je bil na akademiji v Ljubljani redni profesor za fiziko in filozofijo, tudi Vegov učitelj. V letih od 1769 do 1775 je po svojih predavanjih prirejal javne dispute, katerih tiskane teze so ohranjene.

Karl Tirnberger (Ptuj 1731 – 1780 Schottwein, Sp. Avstrija), jezuit, astronom in tehnik, je iz astronomskega observatorija v Gradcu med drugim opazoval tudi znameniti svetli komet leta 1769, o čemer je zapustil zapiske.

Gabrijel Gruber (Dunaj 1740 – 1805 Sankt-Petersburg), jezuit, hidrotehnik, poučeval geometrijo, mehaniko in druge predmete tudi v Ljubljani. Po njem se imenuje prekop Ljubljane med Gradom in Golovcem. V svoji palači namenjeni šoli v Ljubljani na Šentjakobskem trgu si je uredil majhno zvezdarno. Nanjo tam še danes spominja Zvezdarska ulica. Torej se je moral vsaj nekoliko ukvarjati z astronomijo.

Anton Ambschel (Győr na Madžarskem 1751 – 1821 Bratislava), jezuit, matematik in fizik, je bil več let profesor fizike na ljubljanskem jezuitskem kolegiju. Tudi Vegov učitelj fizike. Pisal je matematične in fizikalne učbenike, v katerih je imela astronomija solidno mesto.

4. Lega planeta. Keplerjeva enačba

V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da vsi Keplerjevi zakoni, tudi izpopolnjeni oziroma izboljšani tretji Keplerjev zakon, sledijo iz enega samega, tj. Newtonovega gravitacijskega zakona. Tam smo pokazali, kako izračunamo maso planeta.

Zdaj pa pogledajmo, kako ugotovimo lego planeta na njegovem tiru okrog Sonca. To ugotovimo iz enačbe $r = f(\phi)$, kjer sta r radijvektor, ϕ pa prava anomalija, tj. kot PSA (slika na str. 21). Za pomoč uporabimo znanje geometrije. Narišimo veliko krožnico nad eliptičnim tirom planeta in legi P planeta na tiru priredimo ustrezno lego-točko P' na veliki krožnici. Po Keplerju se kot $P'CA = E$ imenuje ekscentrična anomalija za razliko od prave anomalije, tj. kota $PSA = \phi$.

Če leži planet v času $t = 0$ v perihelu A ($\phi = 0$), v času $t = t'$ pa v legi P , je ploščina izseka $PSA = \pi abt'/t$, če je t obhodni čas.

$$\begin{aligned} \text{Ploščina tega izseka je tudi } (b/a) \cdot \text{ploščina izseka } P'SA &= \\ = (b/a) \cdot (\text{ploščina izseka } P'CA - \text{ploščina } \Delta P'CS) &= (b/2a) \cdot (a^2 E - af \sin E). \end{aligned}$$

Izenačimo dobljena izraza za ploščino, torej $\pi abt'/t = (b/2a) \cdot (a^2 E - af \sin E)$, in izpeljemo slavno Keplerjevo enačbo:

$$2\pi t'/t = E - \varepsilon \sin E$$

Zdaj si zamislimo "srednji" planet P_{sr} , ki enakomerno kroži okrog Sonca v gorišču S . Kot $P_{sr}SA = 2\pi t'/t$ se imenuje *srednja* (povprečna) *anomalija* in izraz $2\pi/t = \mu$ *srednje* (povprečno) *gibanje*, kar fizikalno pomeni srednjo (povprečno) kotno hitrost planeta na njegovem tiru.

Iz izpopolnjenega tretjega Keplerjevega zakona (glej str. 18)

$$a^3/t^2(M + m) = G/4\pi^2 = \text{konstantno sledi, da je } \mu = 2\pi/t = (G(M + m)/a^3)^{1/2}.$$

Iz slike še izpeljemo, da je

$$\begin{aligned} a \cos E &= f + r \cos \phi = f + p \cos \phi / (1 + \varepsilon \cos \phi) = (f + a \cos \phi) / (1 + \varepsilon \cos \phi) \text{ ali} \\ \cos E &= (\varepsilon + \cos \phi) / (1 + \varepsilon \cos \phi) \text{ in obratno: } \cos \phi = (\cos E - \varepsilon) / (1 - \varepsilon \cos E). \end{aligned}$$

Nadalje je $(1 - \cos \phi) / (1 + \cos \phi) = (1 + \varepsilon)(1 - \cos E) / (1 - \varepsilon)(1 + \cos E)$, od koder sledi $\tan(\phi/2) = ((1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon))^{1/2} \cdot \tan(E/2)$.

Tako dobimo za radijvektor izraz

$$r = (p/(1 - \varepsilon^2)) \cdot (1 - \varepsilon \cos E) \text{ oziroma}$$

$$r = a(1 - \varepsilon \cos E)$$

Če torej želimo izračunati lego (r, ϕ) planeta v času t' , moramo reševati in rešiti

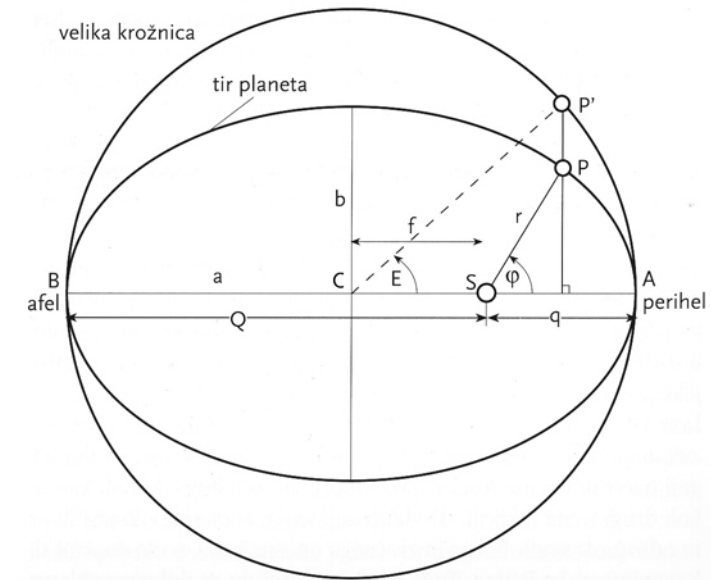
4. Lega planeta. Keplerjeva enačba

Keplerjevo enačbo. Iz enačbe $2\pi t'/t = E - \varepsilon \sin E$ najprej izačunamo E , potem iz enačb:

$$\tan(\phi/2) = ((1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon))^{1/2} \cdot \tan(E/2) \text{ in } r = a(1 - \varepsilon \cos E) \text{ pri znanih } a \text{ in } \varepsilon$$

sledita vrednosti za ϕ in r , kar zahteva zelo veliko računanja [15].

Keplerjevo enačbo, ki ji nekateri rečejo tudi Keplerjev problem oz. naloga, je v svojem učbeniku *Matematična predavanja*, 3. del [2] predstavil oziroma temeljito obravnaval naš J. Vega (gl. dalje 5. in 6. poglavje).



Eliptični tir planeta P okrog Sonca S; C središče elipse oziroma velike krožnice, P (r, ϕ) lega planeta na tiru, a velika polos elipse, P' legi P prirejena ustreznega planeta na veliki krožnici s polmerom a , $\varepsilon = f/a$ (numerična) ekscentričnost — mera za sploščenost — elipse, r radijvektor, ϕ prava anomalija oz. polarni kot, E ekscentrična anomalija, $q = a - f = a(1 - \varepsilon)$ perihelna razdalja, $Q = a + f = a(1 + \varepsilon)$ afelna razdalja; glej še sliko na str. 18.

(Opomba: Za gibanje planetov velja, da se elipsni tiri planetov zelo malo razlikujejo od krožnice.)

Zdaj lahko x izrazimo s kotom ϕ ; radijvektor $|FM| = r = a + ex/a = (a^2 + ex)/a$; iz $\cos \phi = |FP|/|FM| = (e + x) : ((a^2 + ex)/a)$ dobimo $x/a = (a \cos \phi - e)/(a - e \cos \phi)$ in $\sqrt{(1 - x^2/a^2)} = b \sin \phi / (a - e \cos \phi)$. Če to upoštevamo v zadnji enačbi za S , dobimo na koncu:

$$S = (1/2) be [b \sin \phi / (a - e \cos \phi)] + (1/2) ab \arcsin [b \sin \phi / (a - e \cos \phi)] \quad (\text{A})$$

Tu je a – velika polos elipse, b – mala polos elipse, $e = (a^2 - b^2)^{1/2} -$ linearna ekscentričnost elipse, ϕ – prava anomalija.

(Nato je na dva načina izpeljal polarno enačbo elipse in jo potem uporabil za ponovni izračun elipsnega izseka, da je potrdil (A). Navajamo obe izpeljavi polarne enačbe elipse, kjer se v glavnem držimo Vegovih oznak, kjer pa to ni bilo mogoče, označujemo tako, kakor smo navajeni v šoli):

1. izpeljava

Ker je $|FM| = |CA| + |CF| \cdot |CP|/|CA|$ oz. $r = a + ex/a = (a^2 + ex)/a$, iz $\cos \phi = (e + x)/r$ sledi $x = (a^2 \cos \phi - ae)/(a - e \cos \phi)$.

Če vrednost za ta x vstavimo v gornjo enačbo za r , dobimo polarno enačbo elipse $r = b^2/(a - e \cos \phi)$ (B)

2. izpeljava

Iz kosinusnega izreka $\cos \angle FPM = (|FM|^2 + |Ff|^2 - |fM|^2) / 2 |FM| \cdot |Ff|$ oz. iz $\cos \phi = (r^2 + (2e)^2 - (2a - r)^2) / (2r \cdot 2e)$ neposredno sledi (B).

S pomočjo te enačbe (B) moremo pri danem eliptičnem tiru planeta ugotoviti za vsako pravo anomalijo ϕ pripadajočo oddaljenost r planeta od središčne točke privlačnosti⁴.

... Ni pa tako lahko najti iz srednje anomalije pravo. Ta naloga se imenuje *Keplerjeva naloga* (zdaj rečemo *Keplerjeva enačba*), ker jo je prvi reševal slavni Kepler. Pri reševanju te naloge moramo pri dani elipsi (npr. znanih a in b) in znani ploščini AFM določiti kot MFA . Namreč iz dane srednje anomalije m in znanega obhodnega časa T za dano elipso dobimo iz gornjega sorazmerja čas t od A do M . Iz T in zdaj znanega časa t pa dobimo ploščino S središčnega izseka AFM . V enačbi (A) je zdaj znano vse razen iskanega kota ϕ . Keplerjeva naloga bi bila zato rešljiva, če bi lahko iz te enačbe preprosto izračunali ϕ , kar pa nikakor ne gre.

⁴ Lega planeta v ravnini elipse je določena z dvema podatkom - polarnima koordinatama, r in ϕ . Pri znanem S iz enačbe (A) izračunamo ϕ , iz enačbe (B) pa nato pri znanem ϕ določimo r . To naj bi bilo v bistvu vse. Toda pozor, računanje ni tako preprosto, kakor je tu prikazano; gl. še poglavje 4.

S pomočjo izpeljane polarne enačbe elipse (B) je Vega nato ponovno računal in izračunal ploščino omenjenega elipsnega izseka takole:

$$S = (1/2) \int r^2 d\phi = (1/2) b^4 \int (a - e \cos \phi)^{-2} d\phi = (1/2) b^4 \cdot S_1$$

Dalje nas zanima le S_1 . Vpeljal je $x = a - e \cos \phi$ in dobil:

$$S_1 = \int x^{-2} \cdot (-x^2 + 2ax - b^2)^{-1/2} dx = \int x^{-3} \cdot (-1 + 2a/x - b^2/x^2)^{-1/2} dx.$$

Nato je vpeljal $1/x = 1/y + a/b^2$. Sledi:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int y^{-3} \cdot (-1 + a^2/b^2 - b^2/y^2)^{-1/2} dy + (a/b^2) \int y^{-2} \cdot (-1 + a^2/b^2 - b^2/y^2)^{-1/2} dy = \\ &= (1/b^2) (-1 + a^2/b^2 - b^2/y^2)^{1/2} + (a/b) \int y^{-1} \cdot (e^2 y^2 - b^4)^{-1/2} dy = \\ &= (1/b^2) (-1 + a^2/b^2 - b^2/y^2)^{1/2} + (a/be) \int y^{-1} \cdot (y^2 - (b^2/e)^2)^{-1/2} dy = \\ &= (1/b^2) (-1 + a^2/b^2 - b^2/y^2)^{1/2} + (a/b^3) \arccos (b^2/ey) \end{aligned}$$

Ker je $1/y = 1/x - a/b^2$, sledi

$$\begin{aligned} S_1 &= (1/b^2) (-1 + 2a/x - b^2/x^2)^{1/2} + (a/b^3) \arccos (b^2/ex - a/e) = \\ &= (-x^2 + 2ax - b^2)^{1/2}/b^2x + (a/b^3) \arcsin [b(-x^2 + 2ax - b^2)^{1/2}/ex]. \end{aligned}$$

Končno je postavil za $x = a - e \cos \phi$ in za $(-x^2 + 2ax - b^2)^{1/2} = e \sin \phi$, s čimer je potrdil obrazec (A). (Vsekakor je to krasen primer uporabe matematike v sklopu astronomske teme tega poglavja.)

... Da bi enačbo (A) uporabili pri reševanju Keplerjevega problema, označimo srednjo anomalijo z m , obhodni čas s T , za pravo in srednjo anomalijo pripadajoči čas pa t , tako da je $t/T = S/ab\pi$ in $t/T = m/2\pi$ (2π tu pomeni 360°).

Če zdaj vstavimo to vrednost (namreč $S = abm/2$, kar sledi iz obeh zapisanih zvez v zgornji vrsti) v enačbo (A), dobimo (krajšajte, prosim, sami):

$$m = \arcsin [b \sin \phi / (a - e \cos \phi)] + (e/a) [b \sin \phi / (a - e \cos \phi)] \quad (\text{C})$$

To je torej končna oblika iskane enačbe (zveze) med pravo in srednjo anomalijo za dano elipso. S pomočjo te enačbe moremo takoj izračunati iz znane prave anomalije ϕ srednjo m , le da je pri dejanskem izračunu s številkami precej dolgovoznega dela. V nasprotnem primeru, ko je podana m in iščemo pripadajočo ϕ , je pa težava še večja, ker iz enačbe (C) ni možno vedno izpeljati kota ϕ . Račun lahko skrajšamo na naslednji način. Postavimo: $\arcsin [b \sin \phi / (a - e \cos \phi)] = n$, tako da je $[b \sin \phi / (a - e \cos \phi)] = \sin n$ in dobimo skrajšano obliko enačbe:

$$m = n + (e/a) \sin n \quad (\text{Č})$$

Ta enačba je zdaj veliko preprostejša. Iz gornje zveze za $\sin n$ nadalje sledi $\cos n = [(a \cos \phi - e)/(a - e \cos \phi)]$.

... Pri gibanju po obodu elipse sta ekscentrična kakor tudi srednja anomalija v afelu enaki nič. Od tam raste poleg prave anomalije tudi srednja, vendar zadnja slabše kakor prva. V perihelu je spet srednja anomalija enaka pravi, namreč za $\phi = 180^\circ$ je tudi $m = 180^\circ$, kar dobimo iz (C). Čas od perihela do afela je enako dolg kakor od afela do perihela in je enak polovici obhodnega časa. Čas od afela do temena (krajšča) male osi je glede na ekscentričnost precej daljši kot tisti do perihela, kar z lahkoto najdemo, če pri znani elipsi na temenu male polosi izračunamo pripadajočo pravo anomalijo ustreznih srednji anomaliji in tako iz obhodnega časa T raziščemo, kaj se dogaja s časom t , saj velja $T/t = 360^\circ/m$. Čas t odštejemo od $T/2$ in dobimo čas od temena male polosi do perihela.



(V učbeniku [2] je J. Vega obravnaval poleg Keplerjeve tudi središčno enačbo. To je opravil na straneh od 473 do 505. Zdaj nadaljujemo s tekstom o središčni enačbi.)

Razliko med srednjo anomalijo m in pravo anomalijo ϕ v astronomiji imenujemo *središčna enačba* (*aequatio centri*). Če označimo središčno enačbo s p , je $p = m - \phi$, $m = \phi + p$ in $\phi = m - p$, kjer pa, če sta m ali ϕ večja od 180° (anomalijo namreč štejemo od 0° do 360°), zavzame p nasprotni znak, kajti takrat je prava anomalija večja od ustreznih srednje.

Če zdaj v izraz za središčno enačbo $p = m - \phi$ namesto m postavimo pripadajočo vrednost, je $p = \arccos[(a \cos \phi - e)/(a - e \cos \phi)] + (e/a) [b \sin \phi / (a - e \cos \phi)] - \phi$ obrazec, kjer je središčna enačba izražena s pravo anomalijo ϕ .

Če pa bi izrazili središčno enačbo s pomožno (ekscentrično) anomalijo E , če bi torej v enačbi $p = m - \phi$ namesto m in ϕ pripadajoče vrednosti izrazili (zamenjali) z E , pa je

$$p = E + (e/a) \sin E - 2 \arctan [((a - e)/(a + e))^{1/2} \cdot \tan (E/2)] \quad (\text{E})$$

S to enačbo lahko izračunamo vsaki dani pravi anomaliji ϕ pripadajočo središčno enačbo p , če prej dani pravi anomaliji določimo pripadajočo ekscentrično anomalijo po enačbi (D) in nato razrešimo enačbo (E), kjer pomeni zadnji člen dano pravo anomalijo.

Če pa želimo dani srednji anomaliji m izračunati središčno enačbo p , moramo najprej določiti ekscentrično anomalijo po obrazcu (Č) oz. še poboljšati s popravkom (če se to zahteva) in končno uporabiti (E).

S srednjo anomalijo ni nujno izraziti središčne enačbe, ker tudi prave anomalije ϕ ni nujno potrebno preračunati iz dane srednje m . Lahko pa središčno enačbo p celo izrazimo z dano srednjo anomalijo m s pomočjo neskončne vrste, ki pa ni dovolj hitro konvergentna, čim je nekoliko večja ekscentričnost. V zgoraj vpeljani enačbi za središčno enačbo izpeljemo iz ϕ ali iz E za ϕ in $E = 0$, tudi $p = 0$; od tu raste p s ϕ in E do neke določene vrednosti, dalje pa se p spet manjša in postane pri ϕ ali $E = 180^\circ$ spet $p = 0$. Zato mora v določenem primeru p postati največji (torej gre za maksimum). V tem primeru je $dp = 0$ in sledi tudi $dm - d\phi = 0$, kajti $p = m - \phi$ in končno $dm = d\phi$. Je pa $dm = (b^3/a) (a - e \cos \phi)^{-2} d\phi$, če v pravkar vpeljano enačbo

$$S = (1/2) \int b^4 (a - e \cos \phi)^{-2} d\phi \text{ namesto } S \text{ postavimo že zgoraj določeno vrednost } abm/2 \text{ in nato odvajamo.}$$

$$\text{Pri največji vrednosti } p \text{ je tudi } (b^3/a) (a - e \cos \phi)^{-2} d\phi = d\phi.$$

Iz tega sledi $\cos \phi = (a/e) - b^{3/2}/ea^{1/2}$ obrazec, po katerem lahko izračunamo pravo anomalijo, ki pripada največji vrednosti središčne enačbe dane elipse.

Če zdaj želimo izračunati v zgoraj vpeljani enačbi elipse $r = b^2/(a - e \cos \phi)$, s katero pri danem eliptičnem planetnem tiru iz znane prave anomalije ϕ , oddaljenosti planeta r od gorišča, s $\cos \phi$ nadomestimo najdeno vrednost, je tako oddaljenost r , ki pripada največji vrednosti središčne enačbe, enaka $r = (ab)^{1/2}$. Ta oddaljenost je enaka polmeru kroga, ki ima z dano elipso enako ploščino, in kot, ki pripada tej oddaljenosti v gorišču na veliki osi, namreč pripadajočo pravo anomalijo ϕ , lahko kadarkoli izračunamo iz znane enačbe $r = b^2/(a - e \cos \phi)$, če v njej namesto r postavimo pripadajočo vrednost $(ab)^{1/2}$, iz katere dobimo najprej ekscentrično anomalijo, iz nje srednjo anomalijo in končno največjo vrednost središčne enačbe.

Da bi zdaj dobili še eno enačbo za ekscentrično anomalijo, ki pripada največji vrednosti središčne enačbe, bi lahko v zgoraj vpeljanem obrazcu

$$\cos E = [(a \cos \phi - e)/(a - e \cos \phi)] \text{ zamenjali vrednost za } \cos \phi \text{ in nato postavili za } b \text{ vrednost } ((a + e)(a - e))^{1/2}, \text{ tako dobimo}$$

$$\cos E = [-a + a^{1/2} ((a - e)(a + e))^{1/4}]/e, \quad (\text{F})$$

obrazec, s katerim pri največji središčni enačbi zelo lahko izračunamo pripadajočo ekscentrično anomalijo E ; iz tega končno dobimo srednjo in tudi pravo anomalijo ter naprej še največjo vrednost središčne enačbe.

Naj bo npr. $a = 1$ in $e = 0,9$.

Zapišemo torej

$$(m_1 + \mu)/(M + m_1) = (\rho/r_1)^3 (t_1/\tau)^2$$

in v pravkar zapisanem ulomku postavimo v imenovalcu $m_1 = 0$, v števcu pa $\mu = 0$. Zelo strogo pa to seveda ne velja, edino za μ lahko v gornji enačbi vedno postavimo nič, s čimer dobimo natančnejši obrazec za izračun mase planeta, ki ima satelite. Tega pa Vega ne obravnava.

Na zaključku razprave v nekaj vrsticah zapiše še, da je mogoče izračunati tudi mase Jupitrovih satelitov z metodo, ki jo je opisal v svoji razpravi pod § XIII in smo jo tudi mi zgoraj delno nakazali (maso Jupitra moramo vzeti za enoto, $\mu \neq 0$ pa iz enačbe preprosto izračunamo), se nato nasloni na Laplacovo delo in celo citira njegove (kar preveč natančno) izračunane vrednosti za mase prvih štirih največjih Jupitrovih satelitov, imenovanih tudi Galilejeve lune, ker jih je prvi odkril Galileo Galilej (leta 1610). Torej:

masa satelita I (Jo): 0,0000172011 mase Jupitra,

masa satelita II (Evropa): 0,0000237103 mase Jupitra,

masa satelita III (Ganimed): 0,0000872128 mase Jupitra,

masa satelita IV (Kalisto): 0,0000544681 mase Jupitra.

Povzetek

Zdi se, da je Jurija Vego precej zanimala tudi astronomija. To bi lahko sklepali vsaj po treh njegovih dejavnostih: opazoval je Sončev mrk [1], v svojem učbeniku [2] je že obravnaval določene elementarne in tudi zelo zahtevne astronomske vsebine, objavil je tehtno razpravo [3], ki je obsegala poglobljeno tematiko iz nebesne mehanike, ki je veja astronomije.

Nekaj letnic, povezanih z Vego in astronomijo.

Leto 1837.

Za Vegove znanstvene zasluge v matematiki so na predlog astronoma Maedlerja poimenovali krater Vega na Lunini karti (slika na str. 14) [4], [6].

Leto 1997.

Slovenski astronomi so odkrili mali planet št. 14996 in mu dali ime Jurijvega [5], [6].

Leto 2002.

Na Vegovih dnevih je bilo prvič obširneje prikazano, da se je Vega kar precej ukvarjal tudi z astronomijo [8].

Leto 2003.

Izšla je knjiga, izdana ob 250. letnici rojstva in 200. letnici smrti J. Vege, edinega Slovenca, ki je dvakrat ovekovečen na nebu – z imenom kraterja na Luni in planetoida okrog Sonca [6].

Leto 2004.

Na Astronomsko-geofizikalnem observatoriju na Golovcu v Ljubljani so izdelali novi teleskop "Vega", ki že poskusno obratuje [7].



Nove raziskave v letu 2004 so pokazale, da se je Vega še dosti več ukvarjal z astronomijo, kakor smo mislili doslej [16]. Zdi se, da je bil z astronomijo povezan vse od leta 1787, ko je na Dunaju zavzeto opazoval Sončev mrk [1], leta 1788 je v tretjem delu svojih *Matematičnih predavanj* objavil obširen tekst z astronomsko vsebino [2], do leta 1801, ko je v dunajskih efemeridah objavil latinsko napisano razpravo o določitvi mas in drugih parametrov teles Osončja [3], torej vsega skupaj kakšnih petnajst let.

Jurij Vega je opravil pomembno delo na področju klasične teoretične astronomije, saj je pravzaprav obravnaval vrhunsko astronomsko vsebino za tisti čas. Glede tega ga

when he keenly observed a Solar eclipse [1], through year 1788, when he published an extensive astronomical content in his third work of *Vorlesungen über die Mathematik* [2], till the year 1801, when he published in the Vienna's ephemerides a discussion in Latin about the determination of masses and other parameters of celestial bodies in the Solar system[3], that is all together for about 15 years.



For an astronomer the most interested is § 229 in [2], where he deals with Kepler's equation and also of the central equation - *aequatio centri*, as we name the difference between the middle and true anomaly. Here I show particularly a part of Vega's mathematical excellence connected to Kepler's equation, that is, the calculation of the ellipse sector area. I present a little remodelled and contracted Vega's text, to make it understandable for the reader. In [3] there is the whole text very interesting.

After the review of the whole astronomical text in [2] in [3] it is my general impression that Vega was probably interested in astronomy only so much, in so far as he was able to use mathematics in demanding astronomical tasks. His first class and penetrating mathematical spirit is namely present everywhere. Of course someone else can get a different opinion when reading this text. I accept that.

Jurij Vega is the only Slovene who is eternalized on the sky two times. On the Moon there is a crater named Vega and among heavenly bodies around the Sun we can find a minor planet Jurijvega [4], [5], [6].

Zusammenfassung

Es sieht so aus als Jurij (Georg) Vega viele Interessen an die Astronomie hat. Wir können daß aus mindestens drei seiner Tätigkeiten schließen: er hat Sonnenfinsternis beobachtet [1], in seiner Lehrbuch [2] hat Vega bestimmte elementare und auch sehr anspruchsvolle astronomische Inhalte behandelt, er hat eine Debatte veröffentlicht [3], die vertiefte Thematik aus Himmelsmechanik, die ein Zweig der Astronomie ist, hat.

Für einen Astronomen ist am meistens interessant § 299 in [2], in dem J. Vega die Gleichung von Kepler- und Zentagleichung behandelt. Hier ist ein Teil von mathematische Ansehnlichkeit von Vega, in Verbindung mit der Lösung der

Keplergleichung, dargestellt, daß ist die Berechnung von der Flächeninhalt eines Focal-Ausschnittes bei der Ellipse.

Nach der Durchsicht von dem ganzen astronomischen Arbeit von Vega in [2] und [3] ist mein allgemeiner Eindruck, daß Vega nur soviel an Astronomie Interessen hat, insofern er Mathematik in anspruchsvollen astronomischen Aufgaben verwendet könnte. In dem war er ein großer Meister. Überall zeigt sich seiner erstklassigen durchdringenden mathematischen Geist.

J. Vega ist der einzige Slowene, der zweimal an dem Himmel verewigt ist. An dem Mond liegt ein Krater Vega und um die Sonne ein Planetoid Jurijvega kreist [4], [5], [6].

Резюме

Кажется, что Юрий (Георг) Вега занимался астрономией сравнительно много. Мы это думаем на основе хотя бы трех деятельности у него: он наблюдал солнечное затмение [1], в учебнике [2] он обсуждал некоторые элементарные и тоже более трудные астрономические задачи, он опубликовал важный научный труд [3], включающий определенный материал небесной механике.

§ 229 в учебнике [2] самая интересная статья для астронома. Здесь Ю. Вега обсуждает уравнение Кеплера и уравнение центра [*aequatio centri*] на очень высоком математическом уровне, то есть например вычисление площади сектора эллипса.

Осматривая астрономическую работу в трудах [2] и [3] мне кажется, что Ю. Вега интересовался астрономией столько, сколько он элегантно использовал математику для решения труднейших астрономических вопросов.

Ю. Вега единственный словенец, который даже два раза является увековечен в космосе или на небе. На Луне находится кратер Вега, а вокруг Солнца вращается малая планета названна Юриивега [4], [5], [6].

Literatura

- [1] S. Južnič, večkrat poslano in potrjeno sporočilo po e-pošti, marec-oktober 2004; S. Južnič in M. Košir, *Vega meri Sončev mrk*, Spika 2004 (dec.), št. 12, 522.
- [2] J. Vega, *Vorlesungen über die Mathematik*, 3. Bd., Dunaj 1788; poglavji: Die Kreisbewegung in Die Central-Bewegung.
- [3] J. Vega, *Disquisitio de supputatione massarum corporum coelestium e solis ipsorum distantis mediis temporibusque periodicis* (Razprava o izračunu mas nebesnih teles ter posebej srednjih razdalj od Sonca in obhodnih časov), separaten odtis iz dunajskih astronomskih efemerid, 16 strani (15. in 16. stran avtorjeva bibliografija), Dunaj 1801.
- [4] M. Prosen, *Imena na Luni*, Spika 5 (1997), 188; *Še drobna zanimivost o J. Vegi*, Obzornik za mat. in fiz. DMFA Slovenije, L. 47 (2000), št. 4, 126.
- [5] M. Prosen, *Imena planetoidov*, Spika 4 (1996), 500; H. Mikuž, *Poimenovanje asteroida (14966) po slovenskem matematiku Juriju Vegi*, Spika X, št. 2 (2002), 56; gl. še [7].
- [6] M. Prosen, *Imena nebesnih teles*, Jutro, Ljubljana 2003, str. 62/63 in 84/85.
- [7] B. Dintinjana, *Velikan Vega*, Spika XII (jul./avg 2004), št. 7/8, 302; T. Švagelj, *Bistveno je, da ga znamo narediti sami*, DELO/Znanost, 1. 7. 2004, str. 16.
- [8] M. Prosen, *Astronomija na Slovenskem in slovenski astronomi na tujem v Vegovem času in Kratek komentar k Vegovi razpravi DISQUISITIO ...*, Vegovi dnevi 2002, Publ. 1505 DMFA Slovenije, 2002; *Astronomi na Slovenskem v Vegovem času*, Spika X, št. 9 (sept. 2002), 376; *Astronomija na Slovenskem in slovenski astronomi na tujem v Vegovem času*, Zbornik za zgodovino naravoslovja in tehnike, Zv. 15 – 16 (2002), 72, SM, Ljubljana 2002; *Vega in astronomija*, Presek 31 (2003-04), 236; *Vega in nebesna mehanika*, Vegovi dnevi 2004, Publ. DMFA Št. 1564, 48, Lj. 2004.
- [9] P. Simoniti, *Sloveniae scriptores Latini recentioris aetatis. Opera scriptorum Latinorum Sloveniae ...*, Zagreb - Ljubljana 1972.
- [10] V. Murko, *Starejši slovenski znanstveniki in njihova vloga v evropski kulturni zgodovini – Astronomi*, Zbornik za zgodovino naravoslovja in tehnike, Zv. 2, Slovenska matica 1974, 11 - 41.
- [11] M. Prosen, *Astronomija*, Enciklopedija Slovenije št. 1 (1987), 124.
- [12] S. Južnič, *Jurij Vega*, Spika 2 (1994), št. 12, 552.
- [13] F. Avsec in M. Prosen, *Astronomija za 4. r. gimn.*, DZS - DMFA Slovenije, 69.
- [14] M. Prosen, *Vega in nebesna mehanika*, Vegovi dnevi 2004, Publ. 1564 DMFA Slovenije, Ljubljana 2004; *Kako do mase planeta*, Spika XII (maj 2004), št. 5, 212.
- [15] M. Prosen, *Kako do lege planeta*, Spika XII (jun. 2004), št. 6, 260; 56. občni zbor DMFAS, Cerkno, 12.-13.11.2004, str. 54.
- [16] M. Prosen: Lastne raziskave v letu 2004. Predavanje Jurij Vega in astronomija na zaključnem dogodku festivala znanosti SZF, Ljubljana, 21. 10. 2004.
- [17] M. Prosen, *Mali astronomski leksikon*, MK, Ljubljana 2004, str.25 in 139.
- [18] M. Prosen, *Jurij Vega in astronomija v njegovem učbeniku*, Spika XII (dec. 2004), št. 12, 518 in *Jurij Vega in astronomija v njegovem učbeniku*, 2. del Spika XIII (mar. 2005), št. 3, v tisku; *Vegov prispevek astronomiji*, Proteus 67 (2004), 156.
- [19] P. S. Laplace, *Exposition du Systeme du monde, dva dela*, Pariz. 1. izdaja 1796; J. Vega je uporabljal 2. izdajo iz leta 1799.
- [20] Fr. Hauptmann, *Životopis. 163. Jurij Vega*, Slovenska čitanka za peti in šesti razred srednjih šol (Celovec, 1903), stran 381 do 388 in opombe stran 443; *J. Vega v slovenskem berilu za srednje šole*, Vegovi dnevi 2004, Publ. DMFA Slovenije, št. 1564, 47, Lj. 2004.

O piscu

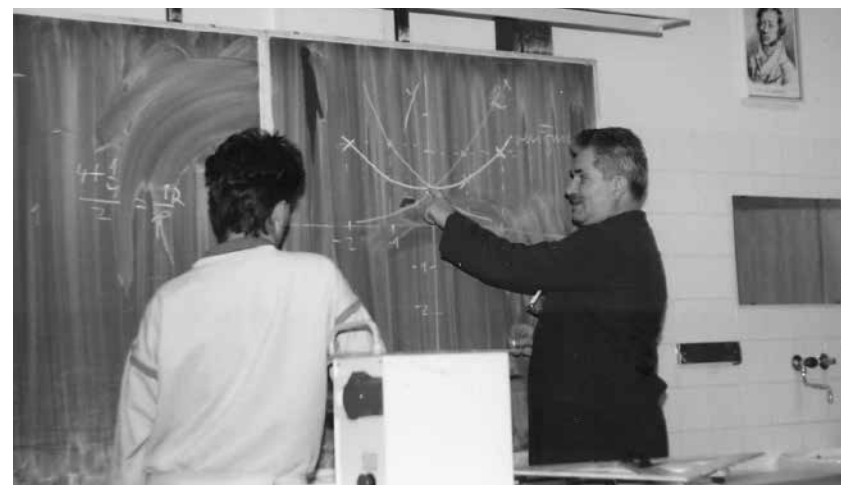
Marijan Prosen – Majo (*13. 3. 1937) je astronom, prof. matematike in fizike v pokoju, svetnik. Njegova bibliografija obsega 75 najrazličnejših publikacij ter okoli 1100 strokovnih in poljudnih prispevkov.

Piše izključno v slovenščini. Piše prispevke od nivojske stopnje male šole do univerze. Se bori za lepšo in boljšo slovenščino. Je tih in nevsiljiv delavec, vendar vztrajen in borben za pravo in pravično stvar.

Zaradi pomembnosti pravilnega človekovega pogleda na svet daje prednost astronomiji pred številnimi drugimi vedami. Rad ima ljudi in živali, zemljo in vesolje.

Dejavnosti: *popularizator astronomije s knjigami, prispevki in predavanji • pisec učbenikov • soavtor meritev natančne lege – zemljepisne dolžine in širine – Astronomsko geofizikalnega observatorija v Ljubljani • mentor prvih treh astronomskih taborov v Sloveniji • organizator in realizator projekta AT – 140 • pisec zgodovine slovenske astronomije v Enciklopediji Slovenije • pisec temeljne slovenske astronomske terminologije • pisec temeljnega slovenskega imenoslovja nebesnih teles • pisec temeljnih zgodb o ozvezdijih in glavnih zvezdah • pisec temeljnih prikazov spreminjanja zvezdnega neba med letom in opazovanja bistvenih tvorb na Luni • specialist za opazovanja sence od Sonca osvetljenih teles.*

Urednik



Avtor publikacije pri pouku razlaga lastnosti krivulje verižnice.

S V E T N A R A V O S L O V J A

Marijan Prosen

JURIJ VEGA IN ASTRONOMIJA

Strokovni pregled:

dr. Stanislav Južnič, dr. Zvonko Perat, mag. Karel Šmigoc, Majda Vehovec

Prevod iz nemščine (gotice):

Stana Prosen

Jezikovni pregled:

Zdravko Potočnik

Prevod povzetka v angleščino in nemščino:

Maja Prosen

Urednik zbirke:

dr. Zvonko Perat

Prelom in oprema:

ONZ Jutro

© Avtor in Založništvo Jutro, Jutro d.o.o.

Izdalo in založilo:

Založništvo JUTRO

Za založbo:

Stane Kodrič

Za pomoč pri zbiranju gradiva se avtor zahvaljuje Maji Klavžar.

Naročila:

Jutro d.o.o., Črnuška c. 3, p.p. 4986, 1001 Ljubljana
Tel. (01) 561-72-30, 041 698-788 • faks (01) 561-72-35
E-pošta: JUTRO@SIOL.NET • WWW.JUTRO.SI