

SVET MATEMATIKE

Marijan Prosen

GEOMETRIJA

PRIROČNIK
ZA GIMNAZIJE
IN DRUGE SREDNJE ŠOLE

Definicije in obrazci

Naloge in rešitve z metodičnimi napotki

Zgodbe iz geometrije



ZALOŽNIŠTVO JUTRO

SVET MATEMATIKE

Marijan Prosen

GEOMETRIJA

Priročnik za gimnazije in druge srednje šole

Recenzenti:

prof. dr. Jože Lep, dr. Zvonko Perat, Zvonka Alt, Špela Bogolin,
Karmen Kete, Ana Kretič, Anton Perat

Jezikovni pregled:

Milan Koželj

Oblikovanje in oprema:

ONZ Jutro

Izdalo in založilo:

Založništvo JUTRO, © Jutro d.o.o., Ljubljana, 2002

Za založbo:

Stane Kodrič

Vinjeta pod naslovom na prvi strani je iz učbenika Geometrija za šesti, sedmi in osmi razred srednjih šol profesorja Blaža Matka iz leta 1920.

Vse pravice pridržane.

Fotokopiranje in vse druge vrste reproduciranja po delih ali v celoti **ni dovoljeno** brez pisnega dovoljenja založbe.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

514(075.3)(076.1)
514(035)

PROSEN, Marijan

Geometrija : Priročnik za gimnazije in druge srednje šole / Marijan Prosen. -
Ljubljana : Jutro, 2002 - (Svet matematike)

ISBN 961-6433-05-9
118614784

Naročila:

Jutro d.o.o., Črnuška c. 3, p.p. 4986, 1001 Ljubljana

Tel.: (01) 561-72-30, 041-698-788

Faks: (01) 561-72-30

E-pošta: Jutro@Siol.net

Knjigarna na internetu: [WWW: JUTRO.SI](http://WWW.JUTRO.SI)

Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje je dne 15. 5. 2002 s sklepom št. 613-271/02 potrdil knjigo "GEOMETRIJA, Priročnik za gimnazije in druge srednje šole" kot učno sredstvo v programih: gimnazijsko izobraževanje, srednje poklicno izobraževanje, srednje tehniško oz. strokovno izobraževanje, poklicno-tehniško izobraževanje.

Predgovor

Priročnik je razdeljen v dva dela. V prvem delu so naloge, v drugem pa rešitve z metodičnimi napotki. Naloge so zbrane klasično:

- *geometrija v ravnini*,
- *geometrija v prostoru*,
- *trigonometrija*,
- *temeljna snov o vektorjih v ravnini in prostoru* (brez vektorskega produkta).

Zgoraj naštetim klasičnim poglavjem sledi poglavje *Razne naloge*, v katerem so tudi naloge iz analitične geometrije v ravnini. Ker je tipičnih nalog iz omenjenega področja dovolj v drugih slovenskih matematičnih učbenikih, sem se odločil za netipične oziroma kombinirane naloge, pri katerih je potrebno že integralno znanje srednješolske matematike. Na koncu so *Naloge za preskus znanja – geometrijsko jutro* (samooocenitev). Za tiste, ki jih reševanje težavnejših geometrijskih orehov posebno navdušuje, pa je dodano še nekaj raziskovalnih geometrijskih nalog.

Izrazoslovje in oznake matematičnih količin so take, kot jih uporabljamo v naši šoli. Naloge so v skladu s predpisanim učnim načrtom.

Nekatere naloge so celo za odtenek zahtevnejše, kot jih prinašajo naši srednješolski učbeniki geometrije, kar pa je le dodaten izziv za uporabnike.

Dijak, ki predela priročnik, si pridobi solidno znanje geometrije, kar mu dobro služi pri vstopu na univerzo ali višjo ali visoko šolo.

Naloge so teoretične in računske. Pri računskih uporabljamo žepni računalnik. Vsako nalogo začnemo reševati najprej sami, lahko tudi v skupini, šele nato pogledamo rešitev, oziroma napotek, če ne znamo naloge rešiti. Nekaj je tudi takšnih nalog, kakršnih še ni bilo v naših učbenikih geometrije.

Vsem, ki boste reševali naloge, želim veliko ustvarjalnosti, predvsem pa, da bi si pridobili želeno znanje. Vse potrebno teoretično znanje za pomoč pri reševanju nalog je na kratko predstavljeno na začetku vsakega poglavja (definicije in obrazci), tako da ni potrebno še dodatno brskati po drugih učbenikih.

Kot že rečeno, rezultati so v drugem delu knjige. Način reševanja večine nalog je metodično podan od začetka do konca, pri zahtevnejših pa je poleg namiga včasih pripisan še kratek komentar glede možnosti reševanja, števila rešitev itn. Pri raziskovalnih nalogah je podan samo rezultat. Kako se dokoplje do njega, je odvisno od reševalčeve raziskovalne vneme in iznajdljivosti.

Kdor dela, ta greši. Vesel bom konstruktivnih pripomb in jih bom upošteval pri morebitnem ponatisu priročnika. Čeprav je geometrija že sama zase zanimiva veda, so priročniku za popestritev dodane še *Zgodbe iz geometrije* in na koncu kratek pregled razvoja geometrije od začetkov do nove dobe (Leibnitza in Newtona).

Naloge so razvrščene na tri težavnostne stopnje:

- osnovni nivo,
- zahtevnejši nivo — označene z eno zvezdico ★,
- posebno zahtevne naloge — označene z dvema zvezdicama ★★.

Marijan Prosen – Majo

Vsebina

Napotki za uporabo priročnika

Osnovne oznake geometrijskih pojmov	7
Merske enote in pretvorniki	8
Reševanje nalog o likih in telesih	9

1 Geometrija v ravnini

Definicije in obrazci	13
Naloge od 1 do 56	25

Zgodbe iz geometrije

<i>Kako je Tales meril oddaljenost ladje od pristanišča</i>	31
<i>Izpeljava Evklidovega izreka v eni minuti</i>	32

2 Geometrija v prostoru

Definicije in obrazci	33
Naloge od 57 do 127	39

Zgodbe iz geometrije

<i>Kepler in prostornina sode</i>	47
<i>Dolžina Lunine sence</i>	48

3 Trigonometrija

Definicije in obrazci	49
Naloge od 128 do 170	55

Zgodbe iz geometrije

<i>Aristarhova določitev oddaljenosti Sonca od Zemlje</i>	63
<i>Homannova elipsa</i>	64

4 Vektorji

Definicije in obrazci	65
Naloge od 171 do 222	70

Zgodbe iz geometrije

<i>Vodovod skozi goro</i>	75
<i>Sekanje polena</i>	76

5 Razne naloge za ponavljanje in razširjanje znanja

Dodatne definicije in obrazci	77
Naloge od 223 do 390	79

Zgodbe geometrije

<i>Zanimivost o zlatem rezu</i>	95
---------------------------------------	----

6 Raziskovalne naloge

Naloge od 392 do 410	97
----------------------------	----

Zgodbe iz geometrije

<i>Družina krivulj</i>	99
------------------------------	----

7 Geometrijsko JUTRO

A. Osnovni nivo – naloge za spodbudo	101
B. Srednji nivo – naloge za izpit	102
C. Visoki nivo – študijske naloge.....	104

Zgodbe iz geometrije

<i>Najbolj opazovani komet</i>	105
<i>Geometrijski pogled na Lunine mene</i>	107
<i>Kratek pregled razvoja geometrije od začetkov do 18. stoletja</i>	109
<i>Geometrija v slovenskih šolah</i>	112

8 Rešitve nalog

Geometrija v ravnini, naloge od 1 do 56	113
Geometrija v prostoru, naloge od 57 do 127	121
Trigonometrija, naloge od 128 do 170	125
Vektorji, naloge od 171 do 222	133
Razne naloge za ponavljanje in razširjanje znanja, naloge od 223 do 390.....	137
Raziskovalne naloge, naloge od 391 do 410	152
Geometrijsko JUTRO	153

NAPOTKI ZA UPORABO PRIROČNIKA

Osnovne oznake geometrijskih pojmov

$A, B, C, \dots, E, F, G, \dots, O, P, T, \dots$	točka
$p, q, \dots, t, s, \dots, p_1, p_2, \dots$	premica
$\Pi, \Phi, \Sigma, \Lambda, \Omega, \dots, \Pi_1, \Pi_2, \dots$	ravnina
AB	daljica s krajiščema A (levo) in B (desno)
$d(A, B)$	razdalja med točkama A in B , medsebojna oddaljenost A in B
$ AB $	dolžina daljice AB
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$	vektor z začetno točko A in končno točko B
$ \overrightarrow{AB} = \vec{a} = AB = a$	dolžina (absolutna vrednost, velikost) vektorja $\overrightarrow{AB}$
$\parallel$	je vzporeden
$\perp$	je pravokoten
$\triangle ABC$	trikotnik z oglišči A, B, C
$\angle ABC$	kot z vrhom B in krakoma BA in BC
$\angle(p, q)$	kot med premicama p in q
$\angle(p, \Pi)$	kot med premico p in ravnino Π
$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots, \varphi, \psi, \omega, \dots, \alpha_1, \beta_1, \dots$	velikost kota
$A \in p$	točka A leži na premici p (A je element p)
$p \notin \Phi$	premica p ne leži na ravnini Φ (p ni element Φ)
$\sin \alpha$	sinus (kota) alfa
$\cos \alpha$	kosinus (kota) alfa
$\tan \alpha$	tangens (kota) alfa; druga označba je "tg α "
$\cot \alpha$	kotangens (kota) alfa; druga označba je "ctg α "
o	obseg lika
S	ploščina lika
P	površina telesa
S_{pl}	ploščina plašča telesa
V	prostornina (volumen) telesa

Merske enote in pretvorniki

Dolžinske enote

milimeter	<i>mm</i>	$1\text{ mm} = 10^{-3}\text{ m}$
centimeter	<i>cm</i>	$1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$
decimeter	<i>dm</i>	$1\text{ dm} = 10^{-1}\text{ m}$
meter	<i>m</i>	$1\text{ m} = 10\text{ dm} = 10^2\text{ cm} = 10^3\text{ mm}$
kilometer	<i>km</i>	$1\text{ km} = 10^3\text{ m}$

Ploščinske enote

kvadratni milimeter	<i>mm²</i>	$1\text{ mm}^2 = 10^{-6}\text{ m}^2$
kvadratni centimeter	<i>cm²</i>	$1\text{ cm}^2 = 10^{-4}\text{ m}^2$
kvadratni decimeter	<i>dm²</i>	$1\text{ dm}^2 = 10^{-2}\text{ m}^2$
kvadratni meter	<i>m²</i>	$1\text{ m}^2 = 10^2\text{ dm}^2 = 10^4\text{ cm}^2 = 10^6\text{ mm}^2$
ar	<i>a</i>	$1\text{ a} = 10^2\text{ m}^2$
hektar	<i>ha</i>	$1\text{ ha} = 10^2\text{ a} = 10^4\text{ m}^2$
kvadratni kilometer	<i>km²</i>	$1\text{ km}^2 = 10^2\text{ ha} = 10^4\text{ a} = 10^6\text{ m}^2$

Prostorninske enote

kubični milimeter	<i>mm³</i>	$1\text{ mm}^3 = 10^{-9}\text{ m}^3$
kubični centimeter	<i>cm³</i>	$1\text{ cm}^3 = 10^{-6}\text{ m}^3$
kubični decimeter	<i>dm³</i>	$1\text{ dm}^3 = 10^{-3}\text{ m}^3$
kubični meter	<i>m³</i>	$1\text{ m}^3 = 10^3\text{ dm}^3 = 10^6\text{ cm}^3 = 10^9\text{ mm}^3 = 10\text{ hl}$
liter	<i>l</i>	$1\text{ l} = 1\text{ dm}^3 = 10^3\text{ cm}^3$
hektoliter	<i>hl</i>	$1\text{ hl} = 10^2\text{ l}$

Kotne enote

kotna stopinja	°	$1^\circ = 60' = 60 \cdot 60'' = 3600''$
kotna minuta	'	$1' = 60''$
kotna sekunda	''	$1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$
radian	<i>rd</i> ali <i>rad</i>	$1\text{ rd} = \frac{180^\circ}{\pi}$ ali $1\text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57,3^\circ$

Reševanje nalog o likih in telesih

Te naloge v glavnem delimo v dve skupini:

- ♦ V prvo skupino spadajo naloge, kjer je treba izračunati kakšno sestavljeno količino, npr. ploščino, obseg, površino, prostornino, maso, ploščino plašča, ploščino osnega preseka in podobno. Pri takih nalogah takoj odgovorimo na zastavljeno vprašanje s formulo (obrazcem, enačbo), ki jo poznamo za sestavljeno količino. Nato upoštevamo (vstavimo) podatke in izračunamo numerično vrednost. Včasih še prej uporabimo na skici (lika, telesa) kotne funkcije, Pitagorov in druge izreke, ki povezujejo posamezne osnovne količine.
- ♦ V drugo skupino spadajo naloge, ki vprašujejo po kakšni preprosti, tj. osnovni (ne sestavljeni) količini, kot npr. osnovni rob, višina, stranska višina, polmer osnovne ploskve in podobno. Ker za te količine nimamo formul, začnemo reševati nalogo pri podatkih, ki so na splošno sestavljene količine, npr. znana je ploščina, površina, prostornina, masa in podobno. Sestavljeno količino (podatek) razstavimo. V njej se pojavi iskana osnovna količina, ki jo izluščimo iz enačbe. Če je potrebno, vstavimo še podatke in izračunamo numerično vrednost iskane količine.

Opomba:

- ♦ Pri reševanju naloge pogosto nujno potrebujemo skico. Skica naj bo majhna, a nazorna. Navadno jo narišemo s prosto roko.
- ♦ Če so podatki dani z mnogoimenskimi števili, jih moramo najprej pretvoriti v enoimenska, npr. rob kocke $a = 3\text{ m } 5\text{ dm } 4\text{ cm} = 3,54\text{ m}$ ali $35,4\text{ dm}$ ali 354 cm .
- ♦ Pri gostoti je treba dolžinske enote uskladiti z enotami za maso. Možne so naslednje kombinacije:

Enota za maso	Dolžinska enota	Enota za gostoto
tona; $t = 1000\text{ kg}$	meter; m	$t/m^3 = 1000\text{ kg/m}^3$
kg	dm	kg/dm^3
g	cm	g/cm^3

Navajamo tri značilne zglede reševanja nalog iz geometrije v prostoru.

1. zgled

V pokončnem stožcu je stranica 5-krat večja od polmera osnovne ploskve, višina pa meri $6\sqrt{6}\text{ cm}$. Izračunaj:

- P ,
- kot φ ob vrhu osnega preseka stožca.

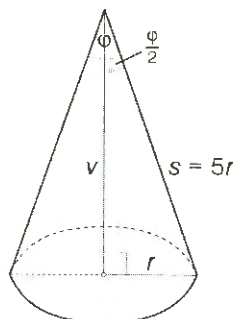
Podatki:

$$v = 6\sqrt{6}\text{ cm}$$

$$s = 5r$$

$$P, \varphi = ?$$

Skica:



Takoj odgovarjamo na vprašanje:

$$P = \pi r(r + s)$$

Polmer r izračunamo po Pitagorovem izreku iz osenčenega trikotnika:

$$s^2 = v^2 + r^2$$

$$25r^2 = 36 \cdot 6 + r^2 \Rightarrow r = 3 \text{ cm in } s = 15 \text{ cm}$$

Obe izračunani vrednosti vstavimo v enačbo za P in dobimo:

$$P = 3\pi \cdot 18 \text{ cm}^2 = 54\pi \text{ cm}^2$$

Kot φ tudi izračunamo iz osenčenega trikotnika. Med r in s velja zveza:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{r}{s} = \frac{r}{5r} = 0,2, \text{ od koder je } \varphi = 23,07^\circ$$

Odgovor: Površina stožca je $54\pi \text{ cm}^2$, kot ob vrhu osnega preseka stožca pa $23,07^\circ$.

2. zgled

Enakorobna pokončna tristrana steklena prizma ima maso $0,25 \text{ kg}$. Izračunaj dolžino roba, če je gostota stekla $2,6 \text{ g/cm}^3$.

Podatki:

Tu skice ne potrebujemo.

$$m = 0,25 \text{ kg}$$

$$\rho = 2,6 \text{ g/cm}^3 = 2600 \text{ kg/m}^3$$

$$a = v = ?$$

Napišemo obrazec za maso telesa: $m = V \cdot \rho$, kjer V razcepimo na osnovne količine,

$$\text{torej } V = S_v = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{a^3 \sqrt{3}}{4}.$$

Sledi $m = \frac{a^3 \sqrt{3} \cdot \rho}{4}$, od koder izluščimo a :

$$a = \sqrt[3]{\frac{4m}{\sqrt{3} \cdot \rho}} = \sqrt[3]{\frac{4 \cdot 0,25 \text{ kg} \cdot \text{m}^3}{\sqrt{3} \cdot 2600 \text{ kg}}} = 0,061 \text{ m} = 6,1 \text{ cm}$$

Odgovor: Rob te steklene enakorobne prizme meri $6,1 \text{ cm}$.

3. zgled

Izračunaj višino v pravilne 4-strane piramide z osnovnim robom a , pri kateri je kot φ med stranskima robovoma ob vrhu piramide enak naklonskemu kotu stranskega roba proti osnovni ploskvi piramide.

Podatkov niti ne pišemo. Skica pa je pri tej nalogi nujna.

Odgovarjamo neposredno na vprašanje.

Skica:

$$\text{Iz skice sledi } v = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\tan\varphi$$

Iz obeh osenčenih pravokotnih trikotnikov izpeljemo:

$$\cos\varphi = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{s}$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{s}$$

Prvo enačbo delimo z drugo in dobimo:

$$\cos\varphi = \sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1-\cos\varphi}}{2} \Rightarrow \cos^2\varphi = 1 - \cos\varphi$$

$$\text{Rešujemo kvadratno enačbo } \cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0 \Rightarrow {}_1(\cos\varphi)_2 = \frac{1}{2}(-1 \mp \sqrt{5})$$

$$\text{Od obeh vrednosti je veljavna pozitivna rešitev, torej } \cos\varphi = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

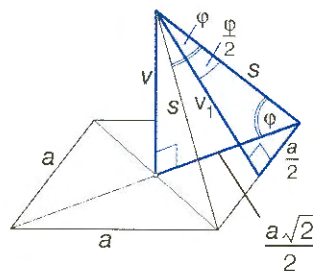
$$\text{Nadalje je } \sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \sqrt{1 - \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot \sqrt{5}-2} \text{ in}$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2 \cdot \sqrt{5}-2}}{\sqrt{5}-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1} \text{ in končno}$$

$$v = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1}$$

Odgovor: Višina te pravilne 4-strane piramide je $v = \frac{a}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}$.

Pri tej nalogi lahko izračunamo še kot φ .



Elipsa

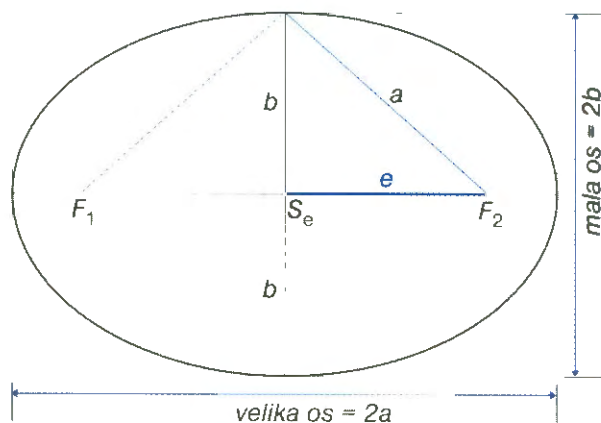
- F_1, F_2 gorišči
- S_e središče elipse
- a velika polos
- b mala polos
- e linearna izsrednost (ekscentričnost)
- ε numerična izsrednost (ekscentričnost)

$$e = \sqrt{a^2 - b^2}; \quad a > b$$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1$$

$$S = \pi ab$$

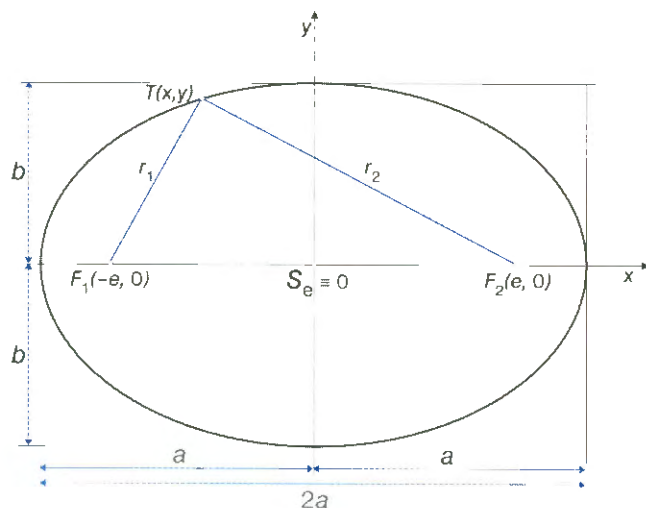
$$o = \pi(a + b)$$



Enačba elipse

v ravnini xy

s središčem v koordinatnem izhodišču $(0, 0)$



Iz definicije elipse $r_1 + r_2 = 2a = \text{konstanta}$, sledi:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$$

- 43.** V polkrog s polmerom $r = 8 \text{ cm}$ vrtamo pravokotnik tako, da njegova osnovnica leži na premeru. Izračunaj višino pravokotnika za primer, da bo imel pravokotnik največjo ploščino. Koliko meri ta ploščina?
- 44.** Na premici $2x + 3y = 9$ določi točko C , ki je od točk $A(-1, 3)$ in $B(5, 5)$ enako oddaljena:
- načrtovalno,
 - računsko,
 - izračunaj še ploščino trikotnika ABC .
- 45.** V katero smer mora potovati svetlobni žarek iz točkastega svetila A , da po odboju v točki C na ravnem zrcalu ZR pade v točko B ? Znano je: $|AB| = d = 10 \text{ cm}$, $|AA'| = a = 5 \text{ cm}$, $|BB'| = b = 2 \text{ cm}$. Glej sliko.
- Nariši smer.
 - Izračunaj, kje leži odbojna točka C .
 - Koliko meri kot med vpadnim in odbojnim žarkom.



- 46.** Na diagonali AC kvadrata $ABCD$ je točka E , ki je oddaljena 1 cm od oglišča A , od oglišča B pa $\sqrt{2} \text{ cm}$. Izračunaj:
- $\angle AEB$
 - $|EC|$
- 47.** Obseg pravokotnega trikotnika meri 66 cm , vsota kvadratov dolžin stranic pa $1512,5 \text{ cm}^2$. Izračunaj:
- dolžino stranic,
 - velikost kotov ob hipotenuzi,
 - količnik trikotniku očrtanega in včrtanega kroga.
- 48.** V paralelogramu $ABCD$ merijo $|AB| = a = 12 \text{ cm}$, $|AD| = b = 8 \text{ cm}$ in $\angle ABD = \varphi = 35^\circ$. Nariši skico. Izračunaj:
- kot ob $A = \alpha$,
 - dolžino diagonale $|BD|$,
 - razdaljo med daljšima vzporednicama.

Kako je Tales meril oddaljenost ladje od pristanišča

Miletski trgovec Tales je predvsem zaslovel z natančno napovedjo nastopa popolnega Sončevega mrka leta 585 pr. n. š., naredil pa je še dosti drugih podvigov, tako v filozofiji, matematiki, astronomiji in drugod. Tales je veliko potoval po deželah Vzhoda. Tam je spoznal geometrijo in astronomijo tistih narodov, kar je potem praktično uporabil.

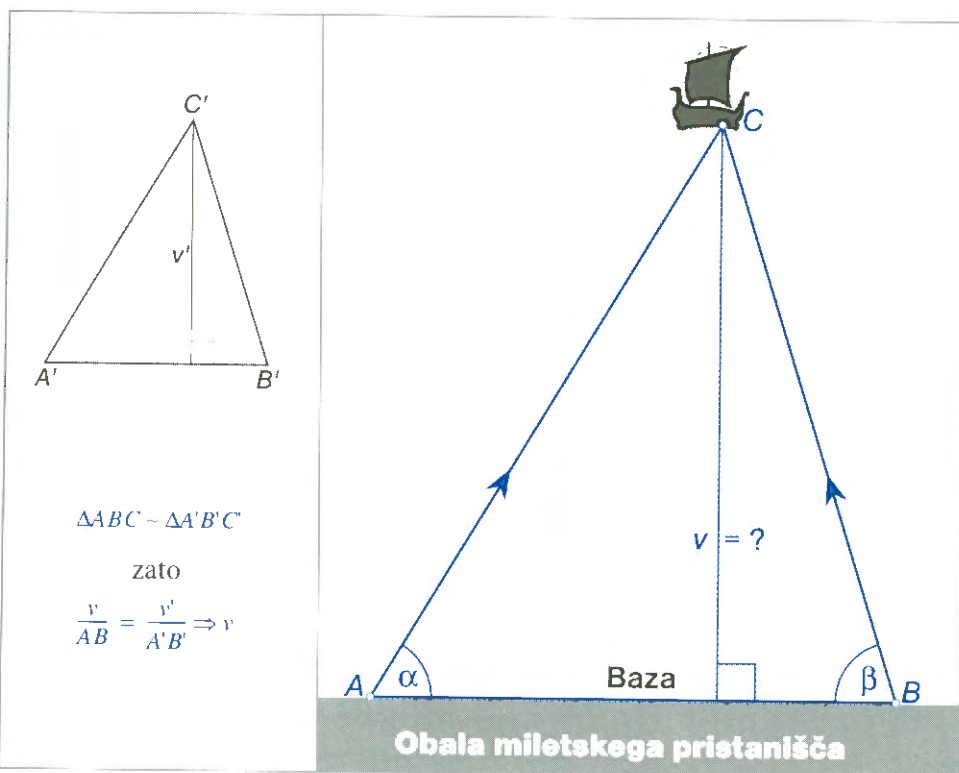
V svojem rojstnem mestu Miletu je ustanovil šolo, kjer so se ukvarjali z geometrijo in astronomijo. Na podlagi podobnosti trikotnikov je znal že takrat določiti višine od Sonca osvetljenih predmetov, če je istočasno izmeril dolžine njihovih senc in dolžino sence palice znane dolžine.

Zelo zanimiv, še bolj pa pomemben za nadaljni razvoj znanosti je bil način, s katerim je Tales določeval oddaljenost ladij od miletskega pristanišča. Iz dveh točk A in B v pristanišču je izmeril kota α in β , ki ju z nosilko osnovnice ali baze AB oklepata smeri iz teh točk proti ladji. Tako je dobil trikotnik ABC , v katerem je imel znano stranico (osnovnico) in njej priležna kota. Tako je ta trikotnik lahko razrešil.

V tistem času še niso poznali sinusnega, kosinusnega in drugih trigonometričnih izrekov za razreševanje trikotnika. Zato je narisal podoben trikotnik $A'B'C'$ in mu izmeril posamezne sestavine, večinoma stranice. Vsaka stranica v prvem trikotniku ABC je tolikokrat večja od stranice v manjšem – podobnem trikotniku, kolikokrat je bila osnovnica AB večja od enakoležne stranice $A'B'$ manjšega – podobnega trikotnika. Seveda enako velja tudi za višini podobnih trikotnikov, torej za izračun oddaljenosti ladje od pristanišča.

Talesov način določanja oddaljenosti ladje je pozneje postal osnova za druga določevanja oddaljenosti teles v zraku (za merjenje oddaljenosti letal z daljinomerom) in v vesolju (določanje oddaljenosti planetov ali bližnjih zvezd s paralakso; o tem glej nalogi 263 in 264).

Po Talesu se imenujejo tudi izreki o podobnosti trikotnikov.



Talesov način merjenja oddaljenosti ladje

Trikotnika ABC in $A'B'C'$ sta si podobna, zato je oddaljenost ladje (višina v v velikem trikotniku):

$$v = \frac{v' |AB|}{A'B'}$$

Tako izračunamo oddaljenost v ladje; vse količine na desni strani enačbe so namreč znane, saj jih neposredno izmerimo.

Tangenta in normala

na krivuljo v ravnini xy

Enačba tangente v točki $T_0(x_0, y_0)$ grafa funkcije $y = f(x)$ je

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

enačba normale pa

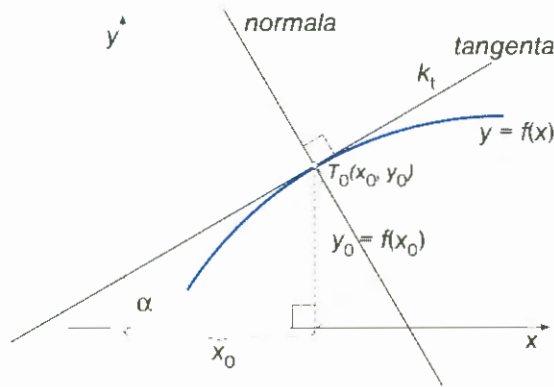
$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

če je $f'(x_0)$ vrednost odvoda

v dotikališču T_0 .

Smerni koeficient tangente je

$$k_t = \tan \alpha = f'(x_0).$$



Ploščina ravninskega lika

v ravnini xy

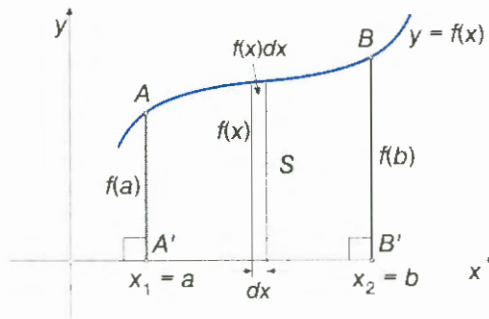
Če je $y = f(x) \geq 0$ za $x \in [a, b]$, je ploščina S lika, ki ga omejujejo krivulja,

abscisna os ter premici $x_1 = a$ in $x_2 = b$ (to je ploščina lika $A'B'BA$),

dana z naslednjim obrazcem:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

če je $F(x)$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$.

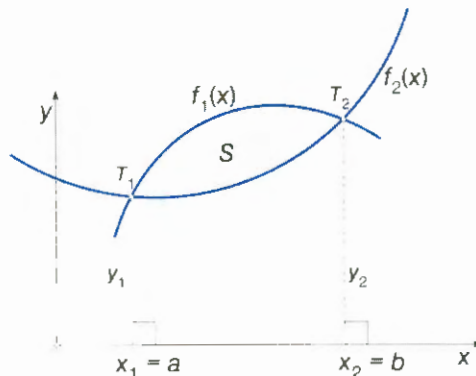


Če je lik ograjen zgoraj s krivuljo $f_1(x)$,

spodaj pa s krivuljo $f_2(x)$ za vse $x \in [a, b]$,

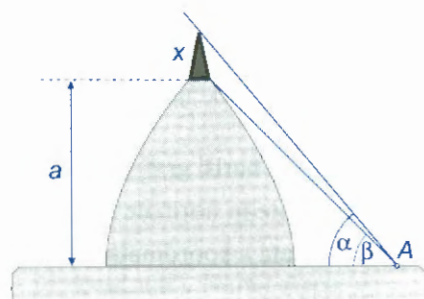
njegovo ploščino izračnemo takole:

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx$$



148. Navpični tovarniški dimnik je viden iz oddaljenosti a pod določenim zornim kotom, ki je dvakrat večji, če se dimniku približamo za b . Izračunaj višino dimnika pri pogoj, da višino človeka zanemariš.

149. Na vrhu gore z višino $a = 210$ m je stolp. Iz točke A sta vrh in podnožje stolpa glede na vodoravno ravnino vidna pod kotom $\alpha = 50^\circ$ in $\beta = 45^\circ$. Izračunaj višino x stolpa, če višino človeka zanemariš (glej skico).



150. V začetku poletja (21. 6. — ob kresu) je pri nas opoldanski višinski kot Sonca 68° (največji), v začetku zime (21. 12. — ob božiču) pa 21° (najmanjši). Zato je dolžina sence, ki jo na vodoravna tla meče od Sonca osvetljena navpična palica, v prvem primeru najkrajša, v drugem pa najdaljša. Pri nekem merjenju je bila razlika med najdaljšo in najkrajšo opoldansko dolžino sence 215 cm. Izračunaj višino palice. Preveri rezultat tudi grafično, to je z načrtovanjem.

151. V $\triangle ABC$ leži točka T na stranici AB tako, da je $|AT| = 1$ cm in $\angle BCT = 90^\circ$; $|AC| = b = \sqrt{2}$ cm, $|AB| = c = \sqrt{3}$ cm. Izračunaj:

- a) vse notranje kote $\triangle ABC$, b) $|BC| = a$, c) R .

152. V pravilni šeststrani piramidi je kot med stranskima robovoma ob vrhu piramide enak naklonskemu kotu stranskega roba proti osnovni ploskvi. Koliko meri ta kot?

153. Izračunaj ploščino plašča pravilne štiristrane piramide z osnovnim robom $a = 6$ cm, če je kot med stranskima robovoma enak naklonskemu kotu stranskega roba proti osnovni ploskvi. Koliko meri še naklonski kot β stranske ploskve proti osnovni?

154. Pokončnemu stožcu je vrtana polkrogla tako, da se dotika plašča, osnovna ploskev polkrogle pa počiva na osnovni ploskvi stožca. Polmer osnovne ploskve stožca je R , ploščina plašča pa je 3-krat večja od površine polkrogle.

- a) Izračunaj kot φ med višino stožca in njegovo stranico.
b) Kolikšen del površine polkrogle (osnovne ploskve polkrogle ne upoštevaj) je viden iz vrha stožca?

155. Izračunaj odvod funkcije (odvajaj):

a) $\sin \frac{x}{3} - \cos 3x$

b) $\tan \frac{1}{x}$

c) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

č) $\sin^3 x \cdot \cos^2 x$

d) $\cot(\cos^2 2x)$

156. Zapiši enačbo tangente in normale v točki $A\left(-\frac{\pi}{12}, y_0\right)$ na krivuljo z enačbo $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Nariši situacijo.

V tem poglavju so zbrane naloge iz različnih področjih geometrije. Zaradi čim večje pestrosti reševanja in živahnosti priročnika pa so vključene tudi naloge o linearni funkciji, polinomih, racionalnih funkcijah, stožnicah, o uporabi odvoda (ekstremi funkcije, tangente in normale na krivulje, sekanje premic, sekanje premic in krivulj ter sekanje krivulj itn.), o uporabi integrala (računanje še vedno preprostih ploščin ravninskih likov, prostornin vrtenin itn.) pa še bi lahko kaj našeli.

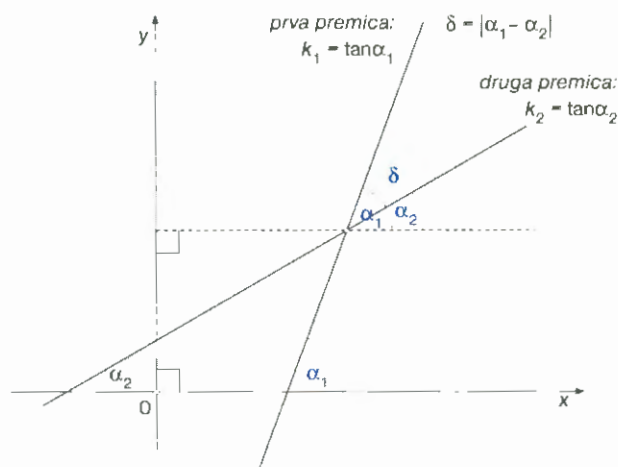
Naloge namenoma niso tematsko urejene. So torej razmetane. Pri njihovem reševanju uporabljaš vse do sedaj nabrano znanje. Nekatere naloge so razmeroma zahtevne, zato ne obupaj in ne vrzi puške v koruzo, četudi ti v začetku naloge ne gre tako, kot si si zamislil. Vztrajaj in vztrajaj, dokler se ne dokoplješ do rešitve. *Ni kraljeve poti do znanja geometrije.*

Za uspešno reševanje nalog v tem poglavju in tudi nadalje navajamo še nekaj najnужnejših definicij in obrazcev.

Kot med presečnicama

Kot δ med ravninskima premicama, ki se sekata, izračunamo po obrazcu:

$$\tan \delta = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|, \text{ če je } k_1 \text{ smerni koeficient prve premice, } k_2 \text{ pa smerni koeficient druge premice.}$$



$$\text{Ker je } \delta = |\alpha_1 - \alpha_2|, \text{ je tudi } \tan |\alpha_1 - \alpha_2| = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|.$$

V primeru $k_1 = k_2$ sta premici vzporedni, v primeru $k_1 = -\frac{1}{k_2}$ pa sta pravokotni druga na drugi.

241. Izračunaj:

a) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$

b) $\int \frac{\sin x}{1 - \cos x} dx$

c) $\int \frac{1}{\cos^2 2x \cdot (1 - \cos^2 2x)} dx$

č) $\int_{-1}^1 (x^3 - 3x + 2) dx$

d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \frac{t}{2} dt$

e) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 \left(3u + \frac{\pi}{6} \right) du$

f) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} dx$

242. Katera normala na sinusoido $y = \sin x$ preseka premico $y = 3x - 1$ pod kotom 45° ?

243. V kateri točki krivulje $y = 2 \sin \frac{x}{2}$ je tangenta vzporedna s premico $y = \frac{1}{2}x + 1$? Nariši situacijo in zapiši še enačbo tangente.

244. Izračunaj kot, ki ga oklepa funkcija $y = -2 \cos 2x + 1$ z osjo x .

245. V ravnini xy nariši množico točk, ki ustrezajo pogoju: $\left(y \geq \frac{3}{5\pi}x \right) \wedge (y \leq \sin x) \wedge \left(\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3} \right)$. Izračunaj še ploščino te ravninske množice.

246. Premica p oklepa kot α z ravnino. Skozi prebodišče premice z ravnino poteka premica q , ki leži v ravnini in oklepa kot β s projekcijo premice p na ravnino. Izračunaj kot ϵ med premicama p in q .

247. Višina CD pravokotnega trikotnika ABC je diagonalna v trikotnik vrtanega pravokotnika.

✪ Izračunaj ploščino tega pravokotnika, če je $|AB| = c$ in $|CD| = v$.

248. Simetrala hipotenuze AB v pravokotnem trikotniku ABC preseka kateto AC v točki D ; $|AD| = 2 \text{ cm}$, $|DC| = \sqrt{3} \text{ cm}$. Izračunaj kot α .

249. V $\triangle ABC$ je $\beta = 75^\circ$, višina na stranico c pa je dvakrat manjša od stranice $c = |AB|$.

✪ Izračunaj kot α .

250. Kotangensi polovičnih kotov trikotnika so zaporedna števila. Dokaži, da je trikotnik pravokoten.

251. V $\triangle ABC$ je $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

✪ Poznaš v_c .

a) Izračunaj $|CE|$, če je E točka, v kateri simetrala kota γ preseka AB .

b) Izračunaj ploščino $\triangle CEF$, če je F točka, v kateri višina na c seka AB .

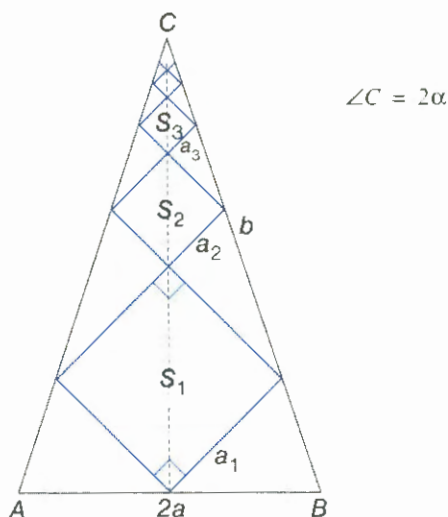
252. V $\triangle ABC$ je $\gamma = 120^\circ$, poznaš še stranici a in b . Simetrala znanega kota seka stranico $c = |AB|$ v točki E , nosilka višine na stranico AB pa jo seka v točki F . Dokaži, da je $\frac{1}{|CE|} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

RAZISKOVALNE NALOGE

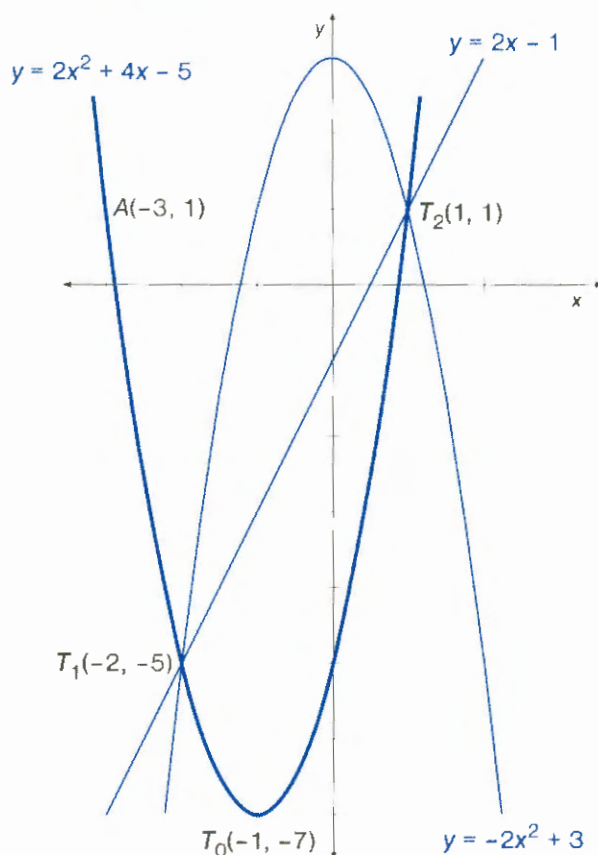
Naloge od 391 do 410

Pri raziskovalnih nalogah je podan samo rezultat. Kako se dokoplješ do njega, pa je odvisno od tvoje prizadevnosti, ustvarjalnosti, znanja, ... skratka – raziskovalnosti.

- 391.** V paralelogramu $ABCD$ poteka skozi oglišče D premica, ki seka diagonalo AC v točki S , stranico AB v točki R , nosilko stranice BC pa v točki Q . Dokaži, da je:
- a) $|DS|^2 = |SR| \cdot |SQ|$
- b) $|AR| \cdot |CQ| = \text{konstanta}$
- 392.** V $\triangle ABC$ poznaš $a - b$, $\alpha - \beta$ in c . Razpravlaj, kako:
- a) narišeš trikotnik.
- b) razrešiš trikotnik.
- 393.** V $\triangle ABC$ poznaš $\alpha - \beta$, a in $s_\gamma = |CD|$ (dolžina simetrale kota γ , pri čemer točka D leži na stranici $c = |AB|$). Razpravlaj, kako:
- a) narišeš trikotnik.
- b) razrešiš trikotnik.
- 394.** V $\triangle ABC$ z znanimi stranicami a , b in c vrtamo krog in nanj narišemo tangente, vzporedne stranicam danega trikotnika. Tangente odsekajo od trikotnika tri trikotnike. V vsakega od teh trikotnikov vrtamo krog. Izračunaj vsoto ploščin vseh štirih krogov.
- 395.** Polkrogu je včrtan največji krog. Izračunaj polmer r kroga, ki se dotika polkrožnice, največjega kroga in premera $2R$ polkroga.
- 396.** Obseg enakokrakega trikotnika je $2s$. Kolikšne morajo biti dolžine stranic, da bo prostornina stožca, ki nastane z vrtenjem tega trikotnika okrog višine na osnovnico, največja.
- 397.** V enakokraki trikotnik z osnovnico $2a$ in krakom b zaporedoma vrtamo kvadrate, ki se manjšajo proti vrhu trikotnika (gl. skico). Izračunaj vsoto ploščin vseh teh kvadratov. Razmisli še, kdaj je naloga rešljiva?
-
- $\angle C = 2\alpha$



- 398.** Pri pravilni 3-strani piramidi s stranskim robom s je kot φ med stranskima robovoma enak naklonskemu kotu stranskega roba proti osnovni ploskvi piramide. Izračunaj:
- a) kot φ ,
b) prostornino piramide.



V družini krivulj (2) je parabola $y = 2x^2 + 4x - 5$ tista določena krivulja, ki gre skozi točko A .

Poskusi še sam

ZA VAJO

iz dane družine krivulj $f(x, y) + \lambda g(x, y) = 0$ določi tisto krivuljo, ki gre skozi dano točko $A(x_1, y_1)$:

•

$$(x - y - 5) + \lambda(x - 2y) = 0, \quad A(-1, 2)$$

[R.: premica $3x - 11y + 25 = 0$]

• •

$$(x^2 + y^2 - 25) + \lambda(x - y + 1) = 0, \quad A(3, 0)$$

[R.: krožnica $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 29$]

• • •

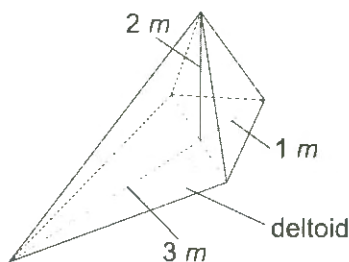
$$(x^2 + y^2 - 4) + \lambda(x^2 + y^2 - 6x) = 0, \quad A(2, -2)$$

[R.: krožnica $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$]

Sestaviš lahko še veliko podobnih in zahtevnejših nalog, v katere vpletaš različne krivulje. Vsakič rešitev prikaži grafično in o njej razpravi. Ta snov sicer ne sodi v redno snov srednješolske matematike (po učnem načrtu), toda zanimiva pa je.

II. del. Od petih nalog izberi dve (obkroži ju) in ja reši.

1. Dani $\triangle ABC$ ($a < b < c$) razdeli na dva plosčinsko enaka dela z odsekom (daljico) najmanjše dolžine. Izračunaj dolžino tega odseka.
2. Po priloženi skici izračunaj površino telesa, ki ima osnovno ploskev deltoid z diagonalama $e = f = 4\text{ m}$, višina telesa pa je 2 m .



3. Pri pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico a se podaljška stranic AB in DC sekata v točki G . Izračunaj:

a) $|EG|$,

b) ploščino $\triangle EFG$.

Nariši skico.

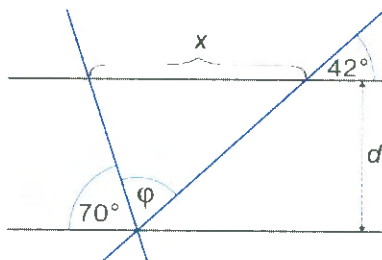
4. Nariši funkcijo $y = \sqrt{\sin x}$ in izračunaj njen odvod.
5. Izračunaj notranje kote trikotnika, če veš, da so njihovi tangensi zaporedna naravna števila.

B. Srednji nivo – naloge za izpit

(npr. za zaključni izpit, za maturo, za kak sprejemni izpit)

I. del. Reši naslednjih osem kratkih nalog:

1. Presečnici sekata vzporednici, kot kaže skica. Izračunaj:
 - a) kot φ ,
 - b) razdaljo x , če je d medsebojna oddaljenost vzporednic.



2. Izračunaj dolžino najkrajše diagonale v pravilnem desetkotniku s stranico $a = 5\text{ cm}$.

KRATEK PREGLED RAZVOJA GEOMETRIJE od začetkov do 18. stoletja

Geometrija v ravnini in prostoru

Prve začetke geometrije najdemo pri starih Egipčanih. Ti geometrije niso imeli za znanost, ampak so uporabljali le posamezne geometrijske izsledke pri vsakoletni izmeri ozemlja, ki ga je poplavljal reka Nil. Stanje staroegiptovske matematike prikazuje nek papirus (2000 do 1600 pr. n. št.), v katerem je mogoče najti pravila o računanju raznih likov in teles, ki pa dajejo le približne vrednosti.

Seksagezimalni sistem merjenja kotov je na primer babilonskega izvora.

Znanstvena geometrija se je pričela šele dosti pozneje pri starih Grkih. Z egipčansko geometrijo jih je seznanil *Tales* iz Mileta (6. stol. pr. n. št.). Po Grkih izpopolnjena egipčanska geometrija je skoraj v nespremenjeni obliki ostala v veljavi do danes.

Pitagora (ok. 580 do 501 pr. n. št.) je s svojo zahtevo po dokazovanju izrekov postavil temelje geometriji kot znanosti. Dobro poznamo njegov izrek o stranicah pravokotnega trikotnika, ki je postal temeljnega pomena pri geometrijskem računanju. V tem času so grške geometre posebno zanimali tri osnovni problemi: *kvadratura kroga* (pretvorba kroga v kvadrat), *delitev kota na tri enake dele* in *podvojitve kocke*.

Platon (429 do 348 pr. n. št.) je za vse geometrijske konstrukcije zahteval, da se morajo opraviti le z ravnilom in šestilom. Vendar na ta način niso mogli priti do rešitev omenjenih problemov, pač pa so pripeljale te naloge do odkritja prvih od kroga različnih krivulj, predvsem stožnic (elipse, parabole in hiperbole). Danes vemo, da so ti trije klasični problemi samo z uporabo ravnila in šestila nerešljivi. Znamenit je bil Platonov napis na akademiji v Atenah. (*Nemo huc ingreditur experts geometria* – *Naj sem ne vstopi nihče, ki ne zna geometrije* – latinski prevod iz grščine; napisano na vhodu v Platonovo šolo. Za vas pa velja: *Le vstopite, vstopite v to hišo geometrije, lepo ste povabljeni, z veseljem se v njej užijte in odnesite iz nje čim več znanja.*)

Vrhunec je grška geometrija dosegla v aleksandrijski dobi, ki je dala tri največje matematike starega veka: Evklida, Arhimeda in Apolonija.

Glavno delo *Evklida* iz Aleksandrije (ok. 300 pr. n. št.) so *Elementi* – delo, ki obsega 13 knjig in v katerem je zbrano vse dotedanje znanje iz matematike. Začetek dela sestavljajo razne definicije, zahteve in aksiomi (stavki, ki so sami po sebi umevni brez dokaza – osnovne resnice). Na podlagi teh se je pozneje razvila vsa geometrija v obliki, ki se je ohranila skoraj nespremenjena do danes. Zelo znana je Evklidova izjava: "Ni nikakršne kraljeve poti do geometrije."

Arhimed iz Sirakuz (287 do 212 pr. n. št.) je bil brez dvoma največji matematik starega veka. Za geometrijo je pomembno njegovo računanje plosčin likov (elipse, odseka parabole), površine krogle in prostornin različnih vrtenin. Za število π je Arhimed našel vrednost $3\frac{1}{7}$, kar še danes uporabljamo v računih, kjer ni potrebna velika natančnost.

Arhimed je bil starogrški matematik, fizik (mekanik – hidrolog), astronom, izumitelj, gradbeni in vojaški inženir (konstruktor katapultov in drugih orožij), izreden raziskovalec in tudi popularizator znanosti. Rojen je bil v Sirakuzah (Sicilija), šolal se je v Aleksandriji (Egipt), večino svojega življenja pa preživel v rojstnem mestu in okolici. Bil je med najpomembnejšimi možmi pri obrambi Sirakuz, graditelj obrambnih vojaških naprav (katapultov). Padel je v bojih pri obrambi skoraj dve leti obleganih Sirakuz (v drugi punski vojni), ki so jih nato zavzeli Rimljani.



