Milena Strnad

STIČIŠČE 9

MATEMATIČNI UČBENIK
za 9. razred osnovne šole

ZALOŽNIŠTVO JUTRO

Viš. pred. mag. Milena Strnad

STIČIŠČE 9

Matematični učbenik za 9. razred osnovne šole

Ilustracije:
Ciril Horjak (po vsebinski zasnovi Milene Strnad)

Avtorski prispevek:
izr. prof. dr. Amalija Žakelj je avtorica sestavka *Modeliranje*.

Avtorji preizkusov znanja:
Milena Štuklek (preizkus 1); mag. Andreja Oder Grabnar (preizkus 2);
Franja Šmon Drevenšek, Nina Mozgan, mag. Sabina Smolar (preizkus 3)

Uredila:
Milena Strnad

Tehniške risbe:
Martin Zemljič, dr. Matjaž Željko

Strokovni pregled:
prof. dr. Mihael Perman, Alen Divjak, prof.

Jezikovni pregled:
Danijela Čibej, prof.

Korekture in preračun nalog:
Milena Štuklek, Alen Divjak, prof.

Prelom in oblikovanje:
Milena Strnad, Martin Zemljič

Oprema:
ONZ Jutro (ilustracija Ciril Horjak)

Izdalo in založilo:
Založništvo JUTRO,
Jutro d.o.o., Črnuška cesta 3, Ljubljana

Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje je na 171. seji dne 18. 6. 2015 s sklepom št. 613-2/2015/75 potrdil knjigo »STIČIŠČE 9, Matematični učbenik za 9. osnovne šole« kot učbenik za pouk matematike v 9. razredu osnovnošolskega izobraževanja.

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.2)

STRNAD, Milena
Stičišče 9. Matematični učbenik za 9. razred osnovne šole / Milena Strnad ; [ilustracije Ciril Horjak ; avtorski prispevek Amalija Žakelj ; tehniške risbe Martin Zemljič]. - Ljubljana : Jutro, 2015

ISBN 978-961-6746-88-5
278164736

NAROČILA:

JUTRO d.o.o., Črnuška c. 3, p.p. 4986, 1001 Ljubljana

Tel. (01) 561-72-30, 041 698-788

Faks (01) 561-72-35

E-pošta: Info@jutro.si • www.jutro.si

Vsebina

♦ Snov iz **izbirne vsebine** v razdelku ali posamezni nalogi.
▭ Snov ali naloga, ki presega predpisani učni načrt iz leta 2011.

Dragi učenci in učenke,

želim vam veliko »preskočenih ovir« na vseh področjih vašega življenja.

Z lepimi željami

Tina Maze

Draga devetošolka, dragi devetošolec,

dobrodošel/-la na zadnjem skupnem odseku poti, ki vodi k uspešnemu zaključku osnovne šole. Na poti boš tako kot doslej spoznaval/-a nove matematične pojme, zakone in povezave ter pridobil/-a nove računske veščine. Pokukal/-a boš v matematično dokazovanje in v nove matematične veje, kot sta *statistika* in *verjetnost*, ter spoznal/-a osnovne značilnosti matematičnega *modeliranja*.

Ničesar, kar ti je ponujeno v učbeniku *Stičišče 9*, se ne ustraši. Vse je na dosegu tvojih rok in uma, če le premoreš dovolj vztrajnosti in volje. Pomembno je, da se učenja lotiš z zaupanjem v lastne sposobnosti in da se naučiš ceniti svoje napore, ki ti bodo zagotovili uspeh. Zgleduj se po svojih idolih. Tudi ti svojih uspehov niso dosegli brez truda in vztrajnosti. Predvsem verjemi, da je učenje matematike nasploh koristno, ker prispeva k razvoju različnih vrst tvojega mišljenja.

Priporočam ti, da učbenika *Stičišče 9* ne uporabljaš le pri reševanju nalog. Preberi razlago v njem in premisli o rešenih zgledih. S tem si tlakuješ pot za uspešno nadaljnje delo v srednji šoli in se usposabljaš za samostojno učenje. Povzetke ugotovitev, zapisane na barvni podlagi, preleti vsakič, ko se boš lotil/-a reševanja nalog iz tega razdelka.

Zgradbo učbenika poznaš iz prejšnjih let. Tudi tokrat ti priporočam, da večkrat prebereš razdelke *Ponavljamo* in *Preverjamo*. To je dobra popotnica za usvojitev trajnega znanja.

V *Stičišču 9* je veliko različnih nalog in izzivov, ki so po zahtevnosti razporejeni v tri skupine. Rešuj jih po nasvetu učiteljice ali učitelja, vendar z reševanjem nalog ne pretiravaj.

V prvem poglavju *Stičišča 9* boš našel/-la predloge za izpeljavo anket, ideje za empirične in matematične preiskave ter modeliranje. Korake modeliranja ob pomoči učiteljice ali učitelja vpletaj tudi v obravnavo drugih sklopov.

V vsakem poglavju te čakajo tudi trije preizkusi, s katerimi lahko samostojno preveriš znanje in posežeš po »bronasti«, »srebrni« ali »zlati kolajni«. Na koncu knjige in v knjižici *Stičišče 9. Slikovno gradivo* najdeš še več različnih preizkusov, ki zajemajo snov vse osnovnošolske matematike. Lahko so ti v pomoč pri pripravah na *Nacionalni preizkus znanja*. Vzemi ga resno zaradi sebe, ne samo zaradi točk, ki štejejo ali pa ne.

Naj ponovim, da so volja in zaupanje vase ter vztrajno in sprotno delo najboljši gradniki, s katerimi boš dosegel/-la bližnje in daljnje cilje. Tudi kakšen morebitni spodrsljaj na poti naj te ne zmoti.

Pogumno in odločno stopi na novo pot, ki naj te pripelje do želenega cilja.
Želim ti veliko uspeha in zadovoljstva.

Milena Strnad

Učinkovito delo z učbenikom omogoča posebna knjiga **Stičišče 9. Slikovno gradivo za preglednezapiske.**
V njej najdeš:
- vse slike nalog in preglednic iz učbenika, da jih lahko izrežeš in nalepiš v zvezek,
- preizkuse znanja iz učbenika s strani 315 in še nekaj dodatnih preskusov,
- več praznih diagramov raznih vrst,
- preglednice za pretvarjanje merskih enot.

Vsebina *STIČIŠČE 9*. **Matematični učbenik za 9. razred osnovne šole**
Snov je razdeljena na poglavja, ta pa na razdelke z uvodnimi naslovi:
Ponavljamo, Spoznavamo, Utrjujemo, Preverjamo.

Poglavje se prične z uvodno stranjo, ki nakaže vsebino.

Razdelek *Ponavljamo* omogoči, da osvežiš pojme in pravila iz preteklih let. V reševanje ponudi tudi nekaj nalog.

V razdelkih *Spoznavamo* se seznaniš z novo snovjo. Vanjo te uvede dogodek, prikazan na ilustraciji. Sledita zgoščena **razlaga** z izpisanimi trditvami na barvni podlagi s preprostimi **rešenimi zgledi** in po zahtevnosti razporejene **naloge**.

Pomembna pravila iz obvezne snovi so zapisana na rumeni podlagi.

Trditve, zapisane na zahtevnejši način, so zapisane na modri podlagi.

Trikotnik z vprašajem te vabi k razmisleku ob zastavljenemu vprašanju. Odgovor preveriš v rešitvah ali pa ga najdeš v nadaljevanju razlage.

Naloge so v vseh razdelkih razporejene na preproste (zelene številke), zahtevne (modre številke) in na zahtevnejše (rdeče številke).

Ob številkah nalog najdeš dodatne znake.

Zvezdica ali **zvezdici** sporočata: »Ne preskoči me.«

Zakrpan balonček pomeni, da gre za nalogo, v kateri je namerno narejena kaka napaka; ima lahko preveč ali premalo podatkov; lahko ima več rešitev ali pa nobene.

Knjiga opozarja, da naloga preverja teoretično znanje. Zahteva pojasnila, ne računanja.

Lupa nad knjigo nakazuje, da je naloga malo zahtevnejša, morda celo raziskovalna.

Mislec nakazuje, da gre za zahtevnejšo nalogo.

Računalo vabi, da ga uporabiš.

Svinčnik opozarja, da sliko ali tabelo iz te naloge prerišeš ali prepišeš v zvezek. Preprosteje in hitreje pa gre, če jo izrežeš iz posebne knjižice **Stičišče 9. Slikovno gradivo za pregledne zapiske** in jo nalepiš v zvezek.

Raziskovalec vabi, da se lotiš *izziva* ali zahtevnejše matematične naloge.

Deltoid opozori, da naloga ali vprašanje sodita k izbirnim vsebinam.

Pravokotnik opozori, da naloga ali vprašanje presegata predpisani učni načrt.

Besedilo in slike na barvni podlagi med nalogami prinašata razne matematične zanimivosti in sem ter tja tudi razširitev obravnavane snovi.

Besedilo in slike na barvni podlagi ali v okvirčku ob strani prinašata pomembne matematične zakone, dogovore, formule ipd.

Pomoč
Učbenik dopolnjuje v celoto knjiga **Stičišče 9. Rešitve nalog.** Dobiš jo ob nakupu učbenika.
Pogosto jo vzemi v roke. V njej poleg rešitev najdeš tudi namige, kako reševati, dodatna pojasnila, včasih tudi dodatno razlago.
Rešitev ne prepisuj, ampak jih samo primerjaj s svojimi izračuni.

Razdelek *Ponavljamo* z naslovom **Vem in znam** prinaša kratke povzetke snovi iz vsakega poglavja.

Razdelek *Utrjujemo* z naslovom **Do trdnega znanja** ponuja več nalog, razvrščenih na tri ravni zahtevnosti. Nadomešča zbirko vaj. Z njim se zaključi vsako poglavje.

Razdelek *Preverjamo* pod naslovom **Do medalj** ponuja tri preizkuse znanja.
Prvi je zelo preprost, drugi je nekoliko zahtevneši, tretji pa še malo zahtevnejši.

Stvarno kazalo usmerja k iskanim pojmom.

V posebni knjigi **Stičišče 9. Rešitve nalog**, ki jo dobiš skupaj z učbenikom, najdeš rešitve vseh nalog iz učbenika. V prvem poglavju najdeš rešitve vseh razdelkov *Spoznavamo* in *Utrjujemo*, rešitve nalog iz razdelkov *Preverjamo*. *Do medalj* so zbrane v drugem poglavju, v tretjem pa rešitve vseh treh *Preizkusov*.

Uvodno poglavje
Anketa v empirični preiskavi U
Modeliranje

V uvodnem poglavju bomo razmislili, kaj vse prinaša učenje matematike. Spoznali bomo, kako pripravimo *vprašalnik*, s katerim izvedemo *empirično preiskavo* in *modeliranje*.
V ta namen bomo:

- osvežili znanje, ki ga uporabljamo pri *urejanju*, *prikazovanju* in pri *interpretaciji* podatkov;
- obnovili dogovore, s katerimi opredelimo *matematično* in *empirično preiskavo*;
- izvedli *empirično preiskavo*, za katero bomo dobili podatke z *anketiranjem*.
- Skozi primere bomo spoznali, kako *modeliramo* življenjske situacije v matematiki.

Namen učenja matematike

Reševanje besedilnih nalog s tematiko iz vsakdanjega življenja je pokazalo, da je znanje matematike uporabno v številnih dejavnostih. Ob prizadevanjih, da bi ponujeno matematično vsebino razumeli in usvojili, pa smo spoznali, da si z učenjem matematike

- razvijamo *logično*, abstraktno in *kritično mišljenje*,
- se učimo sistematičnosti, natančnosti, doslednosti,
- si krepimo voljo, s katero premagujemo ovire,
- se usposabljamo za reševanje in raziskovanje problemov tudi iz drugih predmetov …

Prepričali smo se tudi, da moramo za usvojitev matematičnih vsebin vložiti nekaj dela, razmišljanja in vaje.

Kako se učimo matematike?

Za učenje matematike je veliko možnosti, na primer:

- zbrano poslušamo razlago,
- pišemo zapiske,
- pozorno beremo razlago v učbeniku,
- preračunavamo rešene zglede,
- prebiramo matematične revije in knjige, brskamo po internetu …

Pri učenju se potrudimo, da

- nove pojme in operacije povežemo z znanimi pojmi,
- razumevanje preverjamo z reševanjem nalog in z odgovarjanjem na vprašanja.

Pomembni navodili:

Vprašaj, če česa ne razumeš.

Pomembne obrazce in postopke si zapomni na pamet.

Kaj prinese učenje matematike?

Učenje matematike prinese

sposobnost za

- opazovanje, • analiziranje,
- sklepanje, • združevanje,
- predvidevanje, • abstrahiranje,
- posploševanje,
- sistematiziranje …

sposobnost, da

- uvidimo problem,
- razrešimo problem,
- modeliramo problem, postavimo raziskovalna vprašanja …

spretnost pri

- izpeljavi empiričnih in matematičnih preiskav,
- reševanju geometrijskih problemov,
- izvajanju računskih in algebrskih operacij,
- statistični obravnavi podatkov,
- utemeljevanju rezultatov …

Obdelava podatkov

Vrste podatkov

Podatek je zapis opazovanja, štetja ali meritve. Lahko je *opisen* ali *številski*.
Opisne podatke izražamo z besedami, redko s številkami, npr.: rdeč avto, telefonska številka 051 234 355.
Številske ali *numerične podatke* izražamo s števili. Delimo jih
- na *nezvezne* ali *diskretne* (dobimo jih s štetjem stvari, oseb ... in zapišemo z *naravnimi števili*, npr. 133 ...)
- in na *zvezne* (dobimo jih z merjenji količin; *merska števila* zapišemo z *realnimi števili* in z *mersko enoto*, npr. 113 km/h, $1\frac{1}{2}$ kg, 3,125 t, $5\sqrt{2}$ cm).

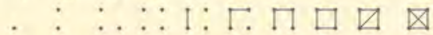
- Podatke *urejamo* po velikosti v *vrsto* ali *niz*, po abecedi pa v *leksikografsko vrsto*.
- Opisne podatke *razporejamo* ali *sortiramo* v *skupine* ali *kategorije* po eni ali več lastnostih.
- Številske podatke *razporejamo* ali *sortiramo* v *razrede*. *Razreda* 2–5 (od vključno 2 do tik pod 5) in 5–8 (od vključno 5 do tik pod 8) itd. določajo števila 2, 5 in 8. Razlika $5 - 2 = 3$ določa *širino razreda*.
- *Kodiranje* je okrajšano poimenovanje podatka s *kodo*.
- *Čiščenje* podatkov je kritično izločanje nepravilnih podatkov.

Črtični zapis štetja podatkov

1 = |, 2 = ||, 3 = |||, 4 = ||||, 5 = ~~||||~~, 6 = ~~||||~~ |,
7 = ~~||||~~ ||, 8 = ~~||||~~ |||, 9 = ~~||||~~ ||||, 10 = ~~||||~~ ~~||||~~

Zapis štetja s kombinacijo pik in črtic

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10



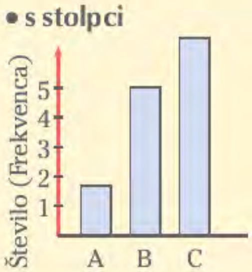
Prikaz podatkov s preglednicami in diagrami

Urejeni opisni in številski podatki kažejo *porazdelitev podatkov*. To prikažemo s *prikazi* različnih vrst:

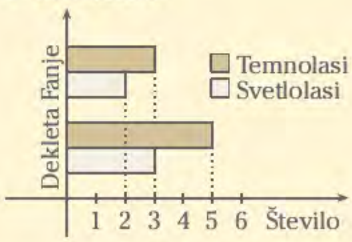
• s preglednico

	Število
A	10
B	30
C	40
...	...
SKUPAJ	

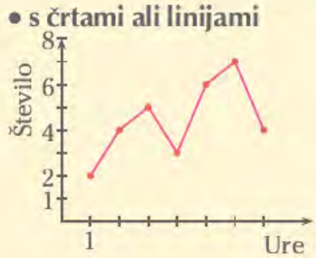
• s stolpci



• z vrsticami

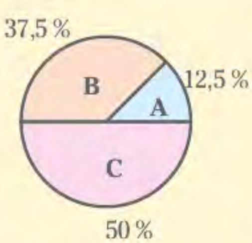


• s črtami ali linijami

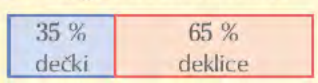


Opombe:
- *Število podatkov*, zbranih v skupini, imenujemo *frekvenca* ali *pogostost*.
- Preglednica, ki kaže frekvence skupin, je *frekvenčna preglednica*.
- Pri *diagramu s stolpci* višina stolpcev ustreza številu podatkov. Pri *diagramu z vrsticami* dolžina vrstic ustreza številu podatkov. Oba diagrama uporabljamo za skupen prikaz dveh ali več vrst vsebinsko povezanih podatkov.
- Prikaz, v katerem zaporedne spremembe prikažemo s točkami in te povežemo s črtami, imenujemo *linijski* ali *črtični diagram*. Z njim navadno pokažemo spreminjanje vrednosti spremenljivke s časom.

• s krogom

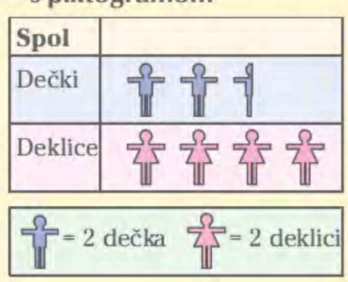


• z diagramom na traku



• s točkovnim diagramom

• s piktogramom



• s histogramom

Opombe:
- *Diagram s krogom* imenujemo tudi *tortni diagram*.
- *Diagram s trakom* in *diagram s krogom* prikažeta deleže podatkov v *odstotkih*. Dolžina traku in ploščina kroga ustrezata 100 %.
- *Točkovni diagram* s številom točk nad izbranimi vrednostmi spremenljivke, prikazanih na osi x, nazorno kaže frekvenčno porazdelitev teh vrednosti.
- *Piktogram* ali *figurni prikaz* s slikami skupaj z *legendo* poda frekvenco opazovanih objektov. Legenda kaže, kolikšno število objektov predstavlja posamezna figura.
- S *histogramom* prikazujemo podatke, razporejene v razrede z znano širino.

Naloge

1

Ugotovi, kateri podatki so opisni in kateri številski: *simpatično dekle, vesel fant, 1,72 m visoka manekenka, rumen šal, vijolični šal, 7 jabolk, 13 hrušk, 125 kg sladkorja, 540 kg moke, 15,7 km poti, dolžina* $15\sqrt{2}$ *m, pokliči na 040 234 222 ali 050 756 354, 4 m zelenega blaga,* $2{,}7 \cdot 10^3$ *prebivalcev.*

2

a) Naštej nekaj *opisnih* in nekaj *številskih* podatkov.
b) Opiši razliko med *nezveznimi* in *zveznimi* številskimi podatki.
c) Kaj pomeni *kodiranje* in kaj *čiščenje* podatkov?

3

V podjetju so zaposleni: direktor, dva pomočnika direktorja, trije ekonomisti, dva pravnika, tri tajnice in sto petnajst delavcev. Razporedi zaposlene v frekvenčno preglednico. Kodiraj zapis poklicev.

4

V preglednici so zbrane jutranje temperaturne spremembe. Prikaži jih s stolpčnim in z linijskim diagramom.

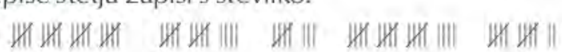
PO	TO	SR	ČE	PE	SO	NE
−6	−2	0	5	−2	−1	3

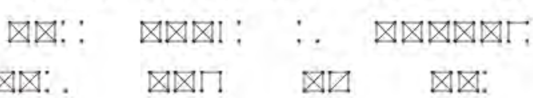
5

Učenke in učenci so pri preverjanju znanja od možnih 20 točk dosegli naslednje število točk:
8, 9, 9, 10, 11, 11, 12, 12, 12, 12, 13, 14, 14, 15, 15, 15, 15, 16, 16, 18, 19, 20, 20
Prikaži dosežene rezultate s točkovnim diagramom.

6

Zapise štetja zapiši s številko.

a) 

b) 

7

Prikaži števila z obema zapisoma štetja.

17, 24, 31, 45, 18, 29

8

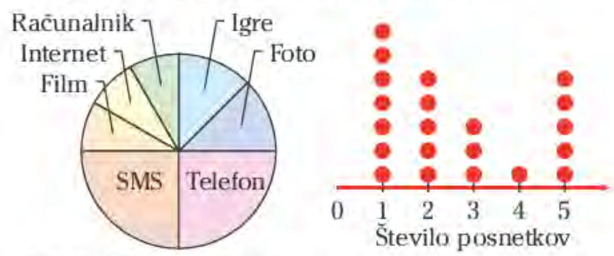
a) Kolikšnemu številu dreves ustreza vsaka figura, če jih figurni prikaz zajame 990?
b) Prikaži z različnimi piktogrami še 2 640 dreves.

9 **

a) Razvrsti mesta Velenje, Piran, Ljubljana, Nova Gorica, Maribor, Celje, Novo mesto, Jesenice, Koper, Trbovlje, Slovenj Gradec, Dravograd, Postojna, Murska Sobota, Izola v leksikografsko vrsto.
b) Poišči število prebivalcev naštetih mest na spletu. Podatke ustrezno zaokroži in uredi v frekvenčno preglednico in elektronsko preglednico.
c) Prikaži število prebivalcev mest s piktogramom. Podatke iz elektronske preglednice prikaži z različnimi grafikoni.

10

Tortni diagram kaže, za kaj uporablja pametni telefon 120 uporabnikov, točkovni diagram pa, koliko od njih dnevno posname od 1 do 5 slik.



a) V kakšne namene največkrat uporabljajo telefon?
b) Koliko uporabnikov uporablja telefon za vsako od naštetih dejavnosti?
c) Pojasni sporočilo točkovnega diagrama.

11

Raziskave spanja so pokazale, da spi 37 % odraslih po 7 ur, 26% po 8 ur, 16 % po 6 ur, 9 % po 9 ur, 6 % okoli 10 ur, samo 5 ur pa tudi 6%.
Prikaži ugotovitve dolžine spanja z diagramom s krogom in z diagramom na traku.

12 **

V zabavnem kvizu so udeleženci odgovorili na deset vprašanj. Vsak pravilen odgovor je bil ocenjen z 1 točko, vsak napačen pa z 0 točkami.
Tekmovalci so dosegli naslednje število točk:

8, 4, 10, 9, 7, 2, 8, 6, 7, 3, 4, 5, 6, 7, 5, 8, 9, 3, 10, 8

a) Koliko udeležencev je sodelovalo v kvizu? Prikaži njihovo porazdelitev s frekvenčno preglednico, s stolpčnim in s točkovnim diagramom.
b) Koliko jih je doseglo od 1 do vključno 3 točke, od 4 do vključno 5 točk, od 6 do vključno 9 točk, od 10 do vključno 11 točk? Rešitev prikaži s frekvenčno preglednico in diagramom s stolpci.
c) Koliko jih je doseglo od vključno 1 do skoraj 3 točke, od vključno 3 do skoraj 5 točk, od vključno 5 do skoraj 7 točk, od vključno 7 do skoraj 9 in od vključno 9 do skoraj 11 točk? Rešitev prikaži s frekvenčno preglednico in s *histogramom*.
č) Kakšna je razlika med podatki, urejenimi v niz po velikosti, in podatki, razporejenimi v razrede?
d) Kritičen premislek. Kakšna je razlika med vsemi tremi prikazi istih podatkov? Pojasni.

Preiskave

Postopke, ki jih izvajamo, da bi razumeli in rešili zastavljeno nalogo, imenujemo *preiskovanje*.

Koraki vsake preiskave vključujejo:

1. postavitev problema (vprašanja, cilja), če ta ni podan,
2. reševanje problema,
3. oblikovanje ugotovitev.
4. utemeljevanje rezultatov.

Cilji preiskave:

1. poiščemo rešitev problema,
2. oblikujemo zapis in prikaz rešitve problema,
3. utemeljimo dobljene rezultate preiskave.

Vrste preiskav

Matematične preiskave
Tako imenujemo reševanje *izzivov*, to je problemov ali situacij, pri katerih vprašanja niso natančno določena in ne vključujejo navodil za reševanje.
Način dela. Iščemo odgovore na vprašanja, ki si jih zastavimo sami. Rezultate preiskovanja ustrezno prikažemo in predstavimo.

Empirične preiskave
Tako imenujemo preiskave, s katerimi raziskujemo probleme iz vsakdanjega življenja. Nanašajo se na veliko število uporabnikov ali predmetov.
Način dela. zbiramo podatke s štetjem, merjenjem, spraševanjem, jih obdelamo, prikažemo in kritično predstavimo.

Naloge

13

Naštej, kaj moraš znati, da bi lahko uspešno izvedel preiskavo.

14

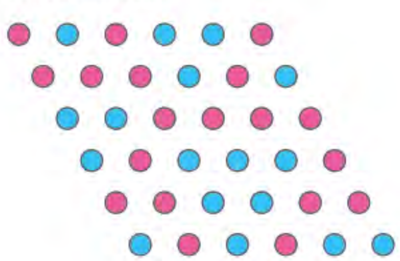
a) Katera vrsta preiskave posnema okoliščine dela pravih raziskovalcev? Opiši jo.
b) Opiši preiskavo, katere ugotovitve slonijo na obdelavi velike množice zbranih podatkov. Navedi kak primer.

15

Opiši razliko med matematično in empirično preiskavo.

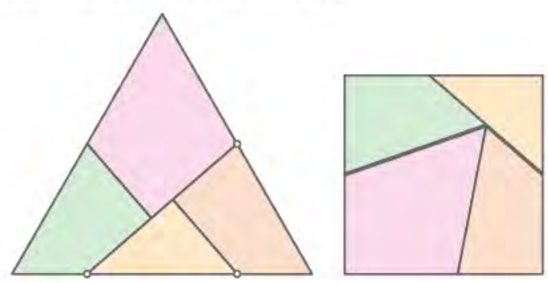
16

Slika kaže razporeditev rdečih in modrih krogov. Razmisli, kakšna vprašanja si ob prikazanem modelu lahko zastaviš.



17

Znameniti angleški matematik Dudeney je sestavil veliko množico logičnih igric, ki si jih oglej na internetu in katero reši. Za pokušino premisli, kot izziv, kaj vse lahko ugotoviš, če takole razrežeš na štiri dele enakostranični trikotnik.



18

Razišči, kakšna naj bi bila zdrava prehrana. Razmisli, kako bi to najlaže ugotovil/-a. Zberi čim več podatkov in jih primerjaj med seboj. Ugotovitev pripravi tako, da bo primerna za krajšo predstavitev pred sošolci in sošolkami.

19

Ali je predvidevanje, da je obisk kinopredstav nadomestil ogled filmov prek TV ali računalnika ali tablice, upravičeno? Odgovor poišči z raziskavo obiskanosti kinopredstav v svojem mestu.

Ali se strinjaš z Matejem?

Pomagaj Nadji sestaviti vprašalnik.

Anketa in anketni list ali vprašalnik

Večino podatkov pri *empiričnih preiskavah* smo doslej pridobili z merjenji različnih vrst: štetjem, tehtanjem, merjenjem dolžin …, redkeje s pripravljenimi *vprašalniki* ali *anketnimi listi*. Zdaj se bomo naučili, kako se sestavi, uporabi in obdela *vprašalnik*.

Na kaj moramo biti pozorni pri pripravi ankete.

Premislimo in ugotovimo.

Pred sestavo vprašalnika se moramo odločiti o zgradbi celotne ankete.
- Osnovno vodilo: Kaj bo natančen namen ankete, kakšni so glavni vzroki problema?
- Na kakšni vrsti populacije glede na spol, starost, okolje itd. bomo raziskovali?
- Kako bomo iz populacije z anketo zajeli ustrezno skupino?
- Kako množična bo naša raziskava?
- Ali bo anketa anonimna?
- Kako bomo pri neanonimni anketi (npr. v bolnišnici, v šoli za zbiranje prijav za kako udeležbo) zagotovili varnost podatkov?
- Kako bomo organizacijsko izvedli anketo: z lističi, razdeljenimi v skupini ali razposlani po pošti ali objavljeni na spletu ipd., z iskanjem odgovorov na vprašanja ankete po telefonu, mobiju ipd.?
- Kako bomo zbrane odgovore analizirali (uredili, prikazali)?
- V kakšni obliki in kje bomo poročali o ugotovitvah raziskave?

Podrobnejša navodila poišči v literaturi na spletu, npr.: http://www.mojaanketa.si

Kakšne so splošne zahteve za vsak vprašalnik?

Premislimo in ugotovimo.

Splošne zahteve za vprašalnik:
- sestavljen mora biti iz kratkih, vljudnih in jasnih vprašanj,
- vprašanja ne smejo biti preveč osebna,
- vprašanja morajo biti zapisana v knjižnem jeziku,
- vprašalnik ne sme biti preobsežen,
- mora biti oblikovan tako, da omogoča vpis želenih odgovorov,
- zaključi naj se z vljudno zahvalo za sodelovanje.

Kakšne vrste vprašanj naj uporabimo?

Premislimo in ugotovimo.

- *Izbirna vprašanja z enim odgovorom.* Primer. Spol: moški, ženski.
- *Izbirna vprašanja z več odgovori.* Primer. Izvenšolske dejavnosti: glasbena šola, zborovsko petje, hip hop, balet, judo, košarka, tenis, rokomet, nogomet, orodna telovadba, drugo.
- *Izbirna vprašanja z enim od odgovorov*, DA/NE/NE VEM.
- *Odprta vprašanja* navadno niso zaželena, ker povzročajo težave pri analizi odgovorov, čeprav so v nekaterih primerih potrebna. Primer. Zakaj cenite moralne norme?
- Pogosto uporabimo ocenjevalno lestvico, npr.: *Prosim, ocenite kvaliteto predavanja učitelja z eno od ocen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.*
- Uporabljamo tudi hierarhična vprašanja. Primer. Razvrsti od 1 do 3 željo po učenju drugega tujega jezika: francoščina, kitajščina, španščina.

1 Anita se je odločila, da bo preverila, kako so z mobilnimi telefoni opremljeni učenci in učenke njene šole, kako jih uporabljajo in če se ob tem zavedajo, da jim ti poleg koristi prinašajo tudi določena tveganja.
Anita je pripravila vprašalnik in ga najprej preizkusila na svojih sošolcih in sošolkah.

VPRAŠALNIK te ankete najdeš v *Stičišču 9. Slikovno gradivo.*

VPRAŠALNIK

Navodila: Ustrezni odgovor vpiši (. . . . .) ali obkroži eno od dveh možnosti.

1) Obkroži: Deček Deklica
2) Razred: 7. 8. 9.
3) A - Ali imaš mobilni telefon na tipke? Da Ne
   B - Ali imaš mobilni telefon na dotik? Da Ne
   C - Ali imaš pametni mobilni telefon? Da Ne
4) V kakšne namene uporabljaš telefon?
   A - za klicanje, Da Ne
   B - za pošiljanje SMS, Da Ne
   C - za brskanje po internetu, Da Ne
   D - za druženje na družabnem omrežju, Da Ne
   E - za igranje igric, Da Ne
   F - za nakupovanje. Da Ne
   G - drugo . . . .
5) Ali pri uporabi telefona premisliš,
   A - kako varno si shranil/-a fotografije, Da Ne
   B - kako varno si shranil/-a kontakte, Da Ne
   C - kako se varno priključiš na internet? Da Ne
6) Kako ugotoviš, če je tvoj telefon okužen?
   A - po tem, da se baterija hitreje prazni, Da Ne
   B - po njegovem počasnejšem delovanju, Da Ne
   C - po težavah pri nalaganju novih aplikacij, Da Ne
   D - okuženosti ne bi prepoznal/-a. Da Ne
7) Kaj bi storil/-a v primeru kraje telefona?
   A - pri svojem operaterju bi takoj preklical/-a SIM kartico, Da Ne
   B - klical/-a bi starše, Da Ne
   C - spremenil/-a bi vsa gesla do drugih uporabniških računov, Da Ne
   D - drugo . . . .

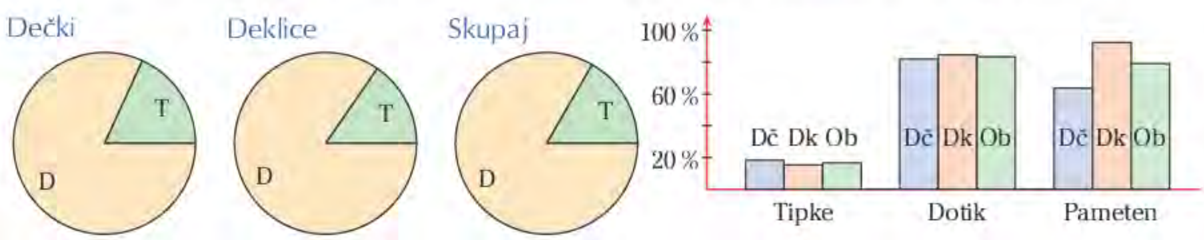
Hvala za sodelovanje.

Po izvedbi ankete je Anita zbrane odgovore uredila.

Anitina predstavitev odgovorov.
Na anketo je odgovorilo 11 učencev in 13 učenk 9. razreda.

3. Opremljenost z mobilnimi telefoni.

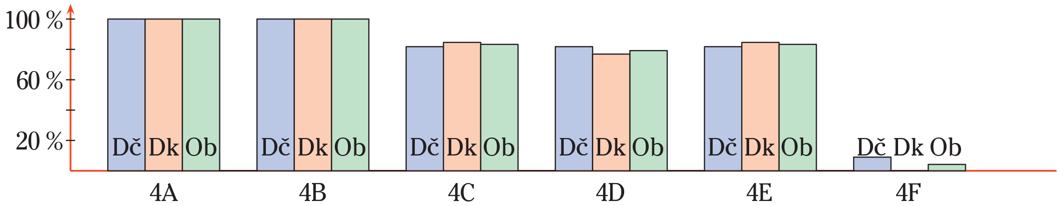
Sklop	3A (M-tipke)		3B (M-dotik)		3C (P-dotik)	
Odgovor	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne
Dečki	2 (18,2 %)	9 (81,8 %)	9 (81,8 %)	2 (18,2 %)	7 (63,6 %)	4 (36,4 %)
Deklice	2 (15,4 %)	11 (84,6 %)	11 (84,6 %)	2 (15,4 %)	12 (92,3 %)	1 (7,7 %)
Oboji	4 (16,7 %)	20 (83,3 %)	20 (83,3 %)	4 (16,7 %)	19 (79,2 %)	5 (20,8 %)



Ugotovimo. Vsi anketiranci imajo mobilne telefone. Prevladujejo mobilci na dotik. Ima jih več kot 80 % vseh vprašanih. Poleg njih ima 63,6 % vseh dečkov in 92,3 % vseh deklet še dodatni pametni telefon.

4. Namen uporabe mobilnih telefonov.

Sklop	4A (klicanje)		4B (SMS)		4C (brskanje)		5D (druženje)		5E (igrica)		5F (nakup)	
Odgovor	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne
Dečki	11 (100 %)	0	11 (100 %)	0	9 (81,8 %)	2 (18,2 %)	9 (81,8 %)	2 (18,2 %)	9 (81,8 %)	2 (18,2 %)	1 (9,1 %)	10 (90,9 %)
Deklice	13 (100 %)	0	13 (100 %)	0	11 (84,6 %)	2 (15,4 %)	10 (76,9 %)	3 (23,1 %)	11 (84,6 %)	2 (15,4 %)	0	13 (100 %)
Oboji	24 (100 %)	0	24 (100 %)	0	20 (83,3 %)	4 (16,7 %)	19 (79,2 %)	5 (20,8 %)	20 (83,3 %)	4 (16,7 %)	1 (4,2 %)	23 (95,8 %)

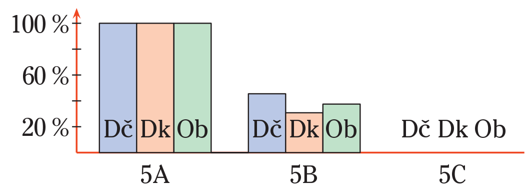


Ugotovimo. Tako deklice kot dečki uporabljajo 100 % mobilni telefon za klicanje in pošiljanje SMS. Dobrih 83 % vseh, to je 81,8 % dečkov in 84,6 % deklic, ga uporablja še za brskanje po internetu. 70 % vseh ga uporablja tudi za druženje na socialnih omrežjih. Pri tem je delež dečkov skoraj za 5 % večji od deleža deklic. Oboji pogosto igrajo igrice, skupni delež je okoli 83,3 %. Deklice pri tem prednjačijo za slabe 3 %. Z mobilniki na splošno še ne kupujejo ne eni ne drugi. Druge dejavnosti ni navedel nihče.

5. Skrb za varno uporabo mobilnih telefonov.

Sklop	5A (fotografije)		5B (kontakti)		5C (priključki)	
Odgovor	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne
Dečki	11 (100 %)	0	5 (45,5 %)	6 (54,5 %)	0	11 (100 %)
Deklice	13 (100 %)	0	4 (30,8 %)	9 (69,2 %)	0	13 (100 %)
Oboji	24 (100 %)	0	9 (37,5 %)	15 (62,5 %)	0	24 (100 %)

Prikazi ad 5).

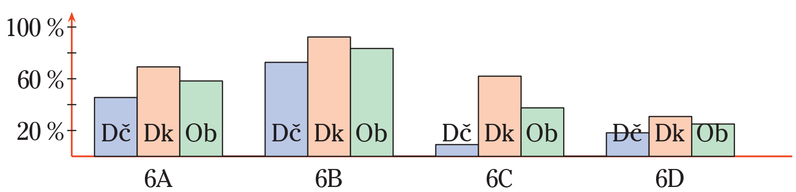


Ugotovimo. Potrebe po zaščiti svojih fotografij se zavedajo vsi. Nevarnosti pri uporabi mobilnih telefonov se ne zaveda niti polovica vprašanih obojih. Pri tem so deklice skoraj za 15 % slabše ozaveščene. Nevarnosti, ki lahko preži pri priklopu na internet, se ne zaveda nihče.

6. Ugotavljanje okuženosti mobilnih telefonov.

Sklop	6A (praznenje)		6B (upočasnitev)		6C (težave)		7D (neprepoznavno)	
Odgovor	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne
Dečki	5 (45,5 %)	6 (54,5 %)	8 (72,7 %)	3 (27,3 %)	1 (9,1 %)	10 (90,9 %)	2 (18,2 %)	9 (81,8 %)
Deklice	9 (69,2 %)	4 (30,8 %)	12 (92,3 %)	1 (7,7 %)	8 (61,5 %)	5 (38,5 %)	4 (30,8 %)	9 (69,2 %)
Oboji	14 (58,3 %)	10 (41,7 %)	20 (83,3 %)	4 (16,7 %)	9 (37,5 %)	15 (62,5 %)	6 (25 %)	18 (75 %)

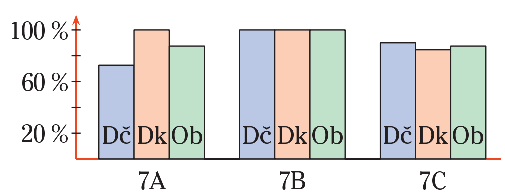
Prikazi



Ugotovimo. Dečki so veliko manj pozorni pri ugotavljanju okuženosti svojih telefonov. Deklice jih za 23,5 % prekašajo pri prepoznavanju hitrejšega praznenja baterij ter za okoli 20 % pri prepoznavanju počasnejše reakcije mobilca. Za okoli 7 % deklice tudi bolj zaznajo težave pri nalaganju aplikacij, ki bi jih povzročila okuženost mobilnika. Okoli tri četrtine vseh pa okuženosti mobilca sploh ne bi prepoznala. Tudi v tem za 13 % prednjačijo dečki.

7. Reakcija ob morebitni izgubi ali kraji mobilnih telefonov.

Sklop	7A (preklic SIM)		7B (starši)		7C (gesla)	
Odgovor	Da	Ne	Da	Ne	Da	Ne
Dečki	8 (72,7 %)	3 (27,3 %)	11 (100 %)	0	10 (90,9 %)	1 (9,1 %)
Deklice	13 (100 %)	0	13 (100 %)	0	11 (84,6 %)	2 (15,4 %)
Oboji	21 (87,5 %)	3 (12,5 %)	24 (100 %)	0	21 (87,5 %)	3 (12,5 %)



Ugotovimo. Vsi bi odreagirali odgovorno. Vsi bi takoj obvestili starše, vse deklice in večina dečkov pa tudi svojega operaterja. Skoraj vsi bi tudi poskrbeli, da bi spremenili vsa gesla.

Naloge

Pomembno!
Ne postavljaj neugodnih, osebnih ali žaljivih vprašanj.

20

Razišči, kako je s prometno osveščenostjo devetošolk in devetošolcev na tvoji šoli. Raziskavo izvedi še na enako številčni skupini šestošolcev. Primerjaj podatke po spolih in po razredih.

Namig za vprašanja.

- Ali prečkajo cesto na prehodu za pešce, na semaforiziranem prehodu, kar povprek . . . ?
- Ali dosledno upoštevajo prometno signalizacijo?
- Ali pri prečkanju ceste vedno pogledajo najprej levo in potem desno ali obratno . . . ?
- Ali hodijo izključno po pločniku ali tudi po stezi za kolesarje . . . ?
- Kako hodijo po cesti, če ni pločnika?
- Ali so zvečer opremljeni z odbojniki, lučmi ipd.?

21

Razišči, kako tvoje sošolke in sošolci preživljajo prosti čas.

Namig. Vprašanja morda sestaviš v treh delih.

- V enem poudari njihovo športno udejstvovanje v različnih športnih zvrsteh od atletike, gimnastike do juda in iger z žogo.
- V drugem poudari umetniško izpopolnjevanje v različnih plesnih zvrsteh, igranju na različne inštrumente.
- V tretjem poudari druge možnosti, kot so igranje šaha, videoiger, brskanje po internetu, gledanje filmov ipd.

22

Razišči, koliko časa in zakaj devetošolci in devetošolke na tvoji šoli preživijo ob računalniku.

Namig. Z anketo ugotovi, za kaj uporabljajo računalnik, koliko časa porabijo za pisanje e-sporočil, pogovore na spletnih omrežjih, gledanje zanimivih oddaj, igranje igric, brskanje po internetu v smislu podpore učenju, brskanju po internetu za zabavo, twittanju ipd.

23

Razišči priljubljenost filmskih žanrov pri devetošolcih in devetošolkah.

Namig. Sestavi anketo na splošno, lahko pa sprašuješ po znanih, trenutno aktualnih filmih.

24

Pripravi anketo o poslušanju radijskih in TV-poročil med sošolkami in sošolci.

Namig. Razišči, koliko učenk in koliko učencev redno spremlja radijska poročila in koliko ji spremlja poročila na TV. Ali poročila morda samo »ujamejo«, ker jih poslušajo njihovi starši? Če poročila poslušajo, kdaj jih poslušajo in kaj jih v njih najbolj zanima: politika doma, politika po svetu, gospodarske novice, kulturni dogodki, vreme, športni dogodki? Ali poročila bolj zanimajo dečke ali deklice?

25

Reklame te spremljajo na vsakem koraku: na cesti, ob prebiranju časopisov, gledanju televizije, poslušanju radia, brskanju po internetu. V obliki intevjuja razišči vpliv reklam na sošolke in sošolce.
Namig. Razišči, ali obstaja vsebinska in oblikovna razlika med reklamami, ki pritegnejo deklice in dečke. Ali reklamam verjameš? Ali te je katera reklama že prepričala? Ali ob gledanju TV preklopiš raje drugam, ko so na vrsti reklame? . . .

26

Razišči, kateri šolski predmet imajo tvoje sošolke in sošolci najraje in katerega najmanj.

Namig. Izpelji anketo. Vanjo vključi seznam vseh šolskih predmetov v tem šolskem letu.

27

Razišči, kako je z razširjenostjo kolesarjenja na tvoji šoli.
Namig. Koliko sošolk in sošolcev kolesari v šolo in nazaj? Koliko jih kolesari le za rekreacijo? Ali se pri kolesarjenju držijo vseh cestnoprometnih predpisov (uporabe čelade, vožnje po kolesarskih stezah . . .)? Koliko kilometrov prekolesarijo na dan ipd.? Ali kolo redno zaklepajo? Ali so jim že kdaj kolo ukradli? . . .

28

Razišči in primerjaj razširjenost rabe mobija med učenkami in učenci druge in tretje triade.
Namig. Za kaj uporabljajo mobi (izmenjavo kratkih pomembnih informacije, za klepetanje s prijateljicami in prijatelji, za pisanje SMS, za brskanje po internetu itd.)?

29

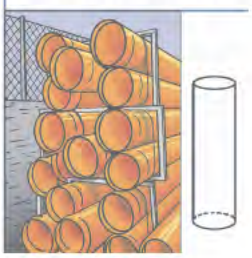
Razišči, katere vrste srednjih šol so v bližini tvojega domovanja.
Namig. Koliko dijakov in dijakinj jo obiskuje? Kakšen predmetnik imajo (recimo glede tujih jezikov itd.)? Ali izvajajo pouk samo dopoldan? Ali organizirajo poučne ekskurzije? Kakšna je možnost nadaljevanja študija oziroma zaposlitve po končanju te šole? . . .

Kako rešuješ besedilne naloge?

Kaj meniš, da pomeni modelirati?

Model in modeliranje

Kaj lahko povemo o parih slik?



Opazimo.

- Vsak par predmetov prikazuje po en predmet iz naše okolice: Zoisovo piramido, oblikovano iz kamnitih kvadrov, papirnato embalažo za sok ter cevi.
- Predmeti ob njih so znana geometrijska telesa: piramida, kvader in valj, ki so prej naštetim predmetom bolj ali manj podobna.

Dogovorimo se.

Primer geometrijskega modela za Zoisovo piramido je piramida.
Primer geometrijskega modela za embalažo soka je kvader.
Primer geometrijskega modela za cev je lahko valj.

Povzemimo.

***Model* je posebna vrsta predstavitve.**
Za model je značilna strukturna podobnost in zamenljivost med objektom in njegovo predstavitvijo: valj je lahko model za cev in obratno, cev je lahko model za valj.

1 Na kaj lahko pomislimo, ko želimo čim hitreje napolniti bazen?

Pomislimo npr. na velikost bazena in število cevi, po katerih teče voda v bazen. V tem primeru nas zanima odnos med časom in številom cevi.

S tovrstnimi izzivi smo se srečali ob reševanju besedinih nalog.

Primer. *V Toplicah napolnijo bazen v 5 urah po 4 ceveh z enako zmogljivostjo. Koliko takih cevi z enako zmogljivostjo bi potrebovali, da bi bil bazen poln v 2 urah?*
Primer rešimo tako, da v njem prepoznamo *obratno sorazmerje*, uporabimo odvisnost $y = \frac{k}{x}$ ter oblikujemo model $y = \frac{20}{x}$.

Ugotovimo.

V primer iz življenja smo vnesli matematiko, obratno sorazmerje, ter oblikovali matematični model $y = \frac{20}{x}$.
Z uporabo modela lahko izračunamo, da potrebujemo 10 cevi, da napolnimo bazen v 2 urah ($x = \frac{20}{2} = 10$), ali pa 2 cevi, da ga napolnimo v 10 urah ($x = \frac{20}{10} = 2$).

Zapomnimo si.

Z uporabo matematike lahko predstavimo realistične situacije, ne le objekte.

2 Kako bi določili uporabnost mobilnega telefona?

Lastnosti mobilnih telefonov:
- hitrost prenosa podatkov,
- moč baterije,
- velikost delovnega pomnilnika.

Primeri podeljevanja certifikata odličnosti.

Revija *Potrošnik* proizvajalcem mobilnih telefonov podeljuje certifikat odličnosti po modelu $M_1 = 3h + b$, revija *Mobi* pa po modelu $M_2 = h + 2b$, (h pomeni hitrost prenosa podatkov, b moč baterije).

Pri ocenjevanju mobilnikov strokovnjaki določijo vrednosti spremenljivk h in b po sistemu: za *odlično* podelijo 3 točke, za *dobro* 2 točki in za *zadovoljivo* 1 točko.

Preblisk.

Za ocenjevanje kakovosti istih naprav imamo dva modela. Kateri je primernejši?

Ugotovimo.

- Model revije Potrošnik daje večji pomen hitrosti prenosa podatkov, model revije Mobi pa moči baterije.
- Strokovnjaki pri reviji Potrošnik svoj model utemeljujejo z mnenji uporabnikov, ki najbolj cenijo hitrost prenosa podatkov, medtem ko strokovnjaki revije Mobi svoj model utemeljujejo s potrebami njihovih uporabnikov, ki zagovarjajo predvsem moč baterije.

Spoznamo.

Pogosto je pri modeliranju realističnih situacij, pri katerih kriterije izbiramo sami, možnih več rešitev, več modelov. Izbiro primernosti modela utemeljimo.

3 Kako lahko šola izbira dijake za vpis?

Na srednji šoli Savlje vsako leto razpišejo prosta mesta za devetošolce v njihovi regiji po modelu $e = 0{,}5p$ (e pomeni število vpisanih dijakov, p število devetošolcev v regiji, ki so tekoče leto stari od 14 do 15 let).

Preblisk. Vprašamo se, ali je prav, da vpisujejo samo devetošolce, stare od 14 do 15 let? Je model pravilen, je primeren?

Premislimo.

Z modelom se v danem primeru lahko strinjamo ali ne. Koliko učencev bodo vpisali na šolo in koliko naj bodo stari, je stvar odločitve vodstva šole in ne pravilnosti modela, smiselno pa je razpravljati o njegovi primernosti. Izbiro modela zato utemeljimo.

Povzemimo.

Pri modeliranju realističnih situacij, pri katerih je možnih več rešitev, ne govorimo o *pravilnosti modela*, temveč o primernosti modela. Model je lahko bolj ali manj primeren.

Naloge

30

Poišči matematične (geometrijske) modele za naslednje predmete: pomaranča, žoga, omara, embalaža za mleko, telefonska žica.

31

Za geometrijska telesa: valj, krogla, piramida, stožec poišči primerne modele v svoji okolici.

32

Opiši, s katerimi matematičnimi vsebinami bi lahko predstavil realistične situacije:

a) odnos med številom avtomobilov in številom koles,

b) število delavcev in čas za izkop jarka.

33

Revija Potrošnik predstavlja in ocenjuje kakovost tabličnih računalnikov. Ocenjevalci uporabljajo sistem, pri katerem ocenjujejo velikost zaslona (z), zmogljivost procesorja (p) ter različne možnosti uporabe (u). Za ocenjevanje imajo izdelana dva modela:

a) $K_1 = z + 3p + u$

b) $K_2 = 2z + p + 3u$

Vrednost spremenljivk določijo tako: *odlično* (3 točke), *dobro* (2 točki), *zadovoljivo* (1 točka).

Kateri model je po tvoji presoji primernejši?

Izbiro utemelji.

Pomagaj Bini in Boru pri postavitvi modela.

Kaj vse morata premisliti, da bo končni model čim bolj primeren za izbiro športnika šole?

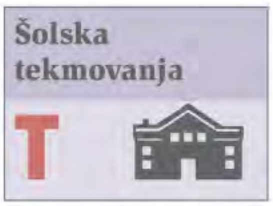
Modeliranje realističnih (življenjskih) situacij

Na šoli Sončni vrh nameravajo izmed učencev njihove šole izbrati *športnika šole*. Premislimo, kako bi glede na rezultate kar najbolj pravično izbrali športnika šole.

Upoštevamo.

***Modeliranje* je *proces*.**
- **Najprej analiziramo izhodiščno situacijo,**
- **oblikujemo predlog modela,**
- **o njem ponovno razmislimo, ga po potrebi dopolnimo in premislimo, ali je primeren in uporaben.**

Modeliranju problema izberemo naslov in naredimo načrt.



Izbira športnika šole

1. Razumevanje izhodiščne situacije
   Razmislimo o problemu in se odločimo, katere kriterije bomo upoštevali. Kdo je lahko športnik šole? Katere lastnosti mora imeti? Katere dosežke upoštevati?
2. Analiziranje situacije
   Pri izbiri spremenljivk se odločamo v skladu z namenom in izbiro kriterijev. V danem primeru bomo izbirali športnika šole, zato je smiselno, da npr. upoštevamo udeležbo in dosežke pri šolskih tekmovanjih ter tudi dosežke pri regijskih tekmovanjih.

Postavimo kriterije:
- aktivna udeležba na šolskih tekmovanjih,
- dosežki na šolskih tekmovanjih,
- dosežki na regijskih tekmovanjih,
- članstvo v regijski reprezentanci.

Izberemo spremenljivke:
- t: število aktivnih udeležb na šolskih tekmovanjih,
- n: število medalj na šolskih tekmovanjih,
- m: število medalj na regijskih tekmovanjih,
- r: članstvo v regijski reprezentanci.

Pripravimo ocenjevalni sistem:
- vrednost spremenljivke t: število aktivnih udeležb na šolskih tekmovanjih,
- vrednost spremenljivke n: število medalj na šolskih tekmovanjih,
- vrednost spremenljivke m: število medalj na regijskih tekmovanjih,
- vrednost spremenljivke r:
  je član državne reprezentance (3 točke), ni član državne reprezentance (0 točk).

3. Izdelamo model
   Odločimo se, da bomo nekoliko bolj upoštevali število medalj na regijskih in šolskih tekmovanjih, in spremenljivko m pomnožimo s faktorjem 3, spremenljivko n pa s faktorjem 2. Ostali dve spremenljivki pomnožimo s faktorjem 1.

Oblikujemo model: $M = t + 2n + 3m + r$

Športnik šole je učenec, ki doseže največje število točk po modelu $M = t + 2n + 3m + r$.

4. Uporaba modela

Zberemo podatke za učence, ki se aktivno ukvarjajo s športom in so osvojili vsaj eno medaljo na šolskih ali regijskih tekmovanjih, in jih prikažemo v preglednicah.

Preglednica 1: Podatki o aktivnih športnikih

Športniki	t	n	m	r
Juš	8	3	1	ne
Bor	9	4	2	ne
Tomaž	6	5	4	da
Bina	10	2	0	ne
Gal	9	1	0	ne
Sara	9	3	1	da
Matevž	10	6	5	da
Alenka	8	2	0	da
Katarina	9	4	5	da

Preglednica 2: Dosežene točke aktivnih športnikov na šoli

Športniki	t	$2n$	$3m$	r	Skupaj
Juš	8	6	3	0	17
Bor	9	8	6	0	23
Tomaž	6	10	12	3	31
Bina	10	4	0	0	14
Gal	9	2	0	0	11
Sara	9	6	3	3	21
Matevž	10	12	15	3	40
Alenka	8	4	0	3	15
Katarina	9	8	15	3	35

Zmagovalca izberemo z uporabo modela $M = t + 2n + 3m + r$. Za vsakega športnika izračunamo dosežene točke in rezultate prikažemo v preglednici 2.

Ugotovimo: Po izbranem točkovanju je največje število točk dosegel Matevž, kar pomeni, da je osvojil naslov športnik šole.

5. Utemeljitev modela

Utemeljitev modela z vidika matematike in z vidika realistične situacije

- Z vidika matematike je model korekten in uporaben.
- Z vidika realistične situacije je utemeljitev zahtevnejša. Pogosto matematični model ne more vključiti vseh okoliščin, ki se v realni situaciji lahko zgodijo, npr. bolezen, dodatni treningi.

Razmislek glede nabora spremenljivk in kriterijev

- Izbrali smo štiri spremenljivke, od tega dve vrednotita aktivnosti učenca - športnika na šoli, saj je pri izboru športnika šole pomembno vključevanje učencev v športne aktivnosti prav na šoli.
- Aktivnosti športnika na šoli ter njegove dosežke na šoli smo uravnotežili tudi z dosežki na regijskih tekmovanjih in s članstvom v regijski reprezentanci.

• Kritični pogled na model

- Učenci 9. b razreda so menili, da formula za izračun skupnega števila točk ni poštena.
- Menili so, da so preveč poudarjeni dosežki na tekmovanjih (število medalj), premalo pa pozitivne lastnosti in značajske značilnosti dobrega športnika.
- Prav tako so menili, da model ne razlikuje zlatih, srebrnih ali bronastih medalj.

• Izboljšava modela

Izdelaj model, ki bo upošteval pripombe učencev 9. b.

Zapomnimo si.

Pri modeliranju so vhodni podatki običajno nedorečeni.
Reševalec se sam odloči, katere podatke bo upošteval.
Pogosto jih lahko spremeni še v postopku modeliranja.

Povzemimo.

Modeliranje je *proces* in poteka v več fazah.

1. Razumevanje izhodiščne situacije
- Razmislek o tem, katere vidike bomo preučili.
- Postavitev ključnega vprašanja.

2. Analiziranje situacije
- Oblikovanje kriterijev.
- Izbira spremenljivk.
- Postavitev ocenjevalnega sistema.

3. Izdelava modela
- Oblikovanje povezav med spremenljivkami.

4. Uporaba modela/Veljavnost modela
- Ali je model uporaben v podobnih situacijah?
- Ali se model nanaša na problem?

5. Utemeljitev modela
- Utemeljitev modela z vidika matematike in z vidika realistične situacije.
- Interpretacija modela.
- Izboljšava modela.

Naloge

34

Izdelajte model, ki bo v primeru *Športnik šole* upošteval predloge učencev 9. b.

35

Pri modelarskem krožku bodo na koncu šolskega leta podelili nagrado za najbolj izviren izdelek.

Izdelaj model, po katerem bodo izbrali nagrajenca.

36

Revija *Vsi na kolo za zdravo telo* predstavlja nove izdelke domačih proizvajalcev koles ter ocene kakovosti koles. Uporabljajo ocenjevalni sistem, pri katerem ocenjujejo preprost sistem za nastavitev višine sedeža (v), prostorno košaro spredaj (k), nenehno prižgano sprednjo in zadnjo luč (l), široko krmilo za boljšo stabilnost (s).

Za ocenjevanje koles imajo izdelana dva modela:

a) $K_1 = 2v + 3k + l + 2s$

b) $K_2 = v + k + l + 3s$

Vrednost spremenljivk določijo tako: *odlično* (3 točke), *dobro* (2 točki), *zadovoljivo* (1 točka).
Kateri model je po tvoji presoji primernejši?
Izbiro utemelji.

37

Na šoli so dobili ponudbo treh založnikov za matematične revije: *Matka*, *Mladi matematik* in *Matematični raziskovalec*. Ker bodo na šoli naročili samo eno revijo, se morajo odločiti, katero bodo izbrali.

Pomagaj jim pri odločitvi. Izdelaj model, po katerem bodo izbrali revijo.

38

Televizija *Modri val* enkrat mesečno predstavi rezultate najbolje ocenjenih dokumentarnih oddaj s strani strokovne komisije. Januarja tega leta so objavili naslednje rezultate:

Oddaja	Točke (t)		
	z	p	k
Oddaja Svet so ljudje	3	2	2
Živi svet	2	2	3
Popotovanja po Evropi	3	3	2

Legenda.
Spremenljivke: zanimivost (z), posnetki (p), komentarji (k). Vrednost spremenljivk določijo tako: *odlično* (3 točke), *dobro* (2 točki), *zadovoljivo* (1 točka).

Za izračun skupnega števila točk uporabljajo model: $t = 3z + p + k$.

a) Katera oddaja je januarja glede na njihov model dobila največ točk?

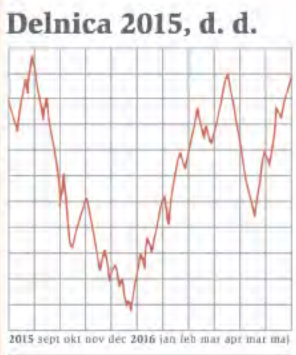
b) Postavi model tako, da bo glede na rezultate v preglednici dobila največ točk oddaja Živi svet. Uporabi vse tri spremenljivke.

Kaj meniš, na čem temelji napovedovanje?

Kje vse se uporablja napovedovanje?

Modeliranje realistične situacije z empiričnimi podatki

Kaj lahko povemo o podatkih na slikah?



Opazimo.
Slike prikazujejo vremensko sliko, gibanje cen izbranega izdelka, gibanje cene delnice.
Napovedi temeljijo na predhodnih izkušnjah, na zbranih empiričnih podatkih.

Spoznamo.

Napovedovanje **se uporablja v statistiki, pri razpoznavanju vzorcev, v financah, v medicini, pri vremenskih napovedih, astronomiji idr.**

Proces modeliranja z empiričnimi podatki

V farmacevtski družbi *Medical* želijo oblikovati model, po katerem bi določali učinkovitost izbranih zdravil za določeno bolezen. Pomembno je, da zdravilo hitro učinkuje. Imajo zbrane podatke o hitrosti učinkovanja štirih vrst zdravil (na populaciji med 50. in 60. letom starosti): kat, sac, ral, kef.

Glede na podatke izdelajmo *model*, s katerim bomo izbrali najučinkovitejše zdravilo.

Preglednica 1: Reakcijski časi (t) učinkovanja zdravil v minutah (min)

	kat	sac	ral	kef
Oseba	t (min)	t (min)	t (min)	t (min)
Ana	20	10	12	10
Borut	18	19	14	12
Cene	19	13	15	17
David	22	11	15	17
Edo	15	11	7	17
Franci	14	12	9	19
Gregor	23	10	9	22
Hana	12	9	8	22
Ivo	11	8	8	21
Jaka	10	8	15	10

	kat	sac	ral	kef
Oseba	t (min)	t (min)	t (min)	t (min)
Karmen	7	14	19	7
Lili	9	13	10	7
Maja	10	12	10	7
Nina	17	17	23	19
Oton	13	11	24	18
Pavle	12	11	23	14
Rok	14	13	10	12
Sabina	14	20	8	10
Teja	8	25	17	10

1. Razumevanje izhodiščne situacije
   Postavimo ključno vprašanje: Katero zdravilo najhitreje učinkuje? Ali z drugimi besedami: Katero zdravilo ima najkrajši reakcijski čas?
2. Analiziranje situacije
   Nalogo bomo rešili tako, da bomo postopoma izbrali najprimernejši *kriterij*.

a) Prvi krog
Usmerimo se samo na del podatkov.

Iz preglednice 1 izberemo najkrajše reakcijske čase in jih predstavimo v preglednici 2.

Preglednica 2: Izbor najkrajših reakcijskih časov

	kat	sac	ral	kef
	t (min)	t (min)	t (min)	t (min)
Najkrajši reakcijski čas	7	8, 8	7	7, 7, 7

Določimo kriterij 1.
Zdravilo je najučinkovitejše, če ima najkrajši reakcijski čas.

Analiziramo podatke in ugotovimo, da ima kef trikrat reakcijski čas 7, ral in kat imata po enkrat reakcijski čas 7, sac ima dvakrat reakcijski čas 8.

Predlog za razvrstitev zdravil glede na kriterij 1: kef, kat, ral, sac.
V prvem krogu smo upoštevali zelo malo podatkov, zato je smiselno analizirati in primerjati še druge podatke. Izvedli bomo drugi krog.

b) Drugi krog
Usmerimo se na večje število podatkov.

Iz preglednice 1 izberemo najkrajše in najdaljše reakcijske čase in jih predstavimo v preglednici 3.

Preglednica 3: Izbor najkrajših in najdaljših reakcijskih časov

	kat	sac	ral	kef
	t (min)	t (min)	t (min)	t (min)
Najkrajši reakcijski čas	7, 8	8, 8, 9	7, 8 8, 8	7, 7, 7, 10, 10, 10, 10, 10
Najdaljši reakcijski časi	23, 22	25, 20	24, 23, 23	22, 22, 21

Določimo kriterij 2.
Zdravilo je najučinkovitejše, če ima najkrajši reakcijski čas in čim nižji najdaljši reakcijski čas.
Analiziramo podatke in ugotovimo:
- kef ima trikrat najkrajši reakcijski čas 7 min in petkrat reakcijski čas 10 min;
- pri zdravilu ral se največkrat ponovi reakcijski čas 8 min;
- pri zdravilu sac beležimo najdaljši reakcijski čas 25 min.

Predlog za razvrstite zdravil glede na kriterij 2: kef, ral, kat, sac.
Pomislek. V prvem in drugem krogu smo analizirali in primerjali najkrajše in najdaljše reakcijske čase. Kaj pa ostali podatki?

c) Tretji krog
Usmerimo se na vse podatke.

Za vsako zdravilo izračunamo vsoto vseh reakcijskih časov in jih predstavimo v preglednici 4.

Preglednica 4: Vsota vseh reakcijskih časov

	kat	sac	ral	kef
	t (min)	t (min)	t (min)	t (min)
Vsota reakcijskih časov	268	247	256	271

Določimo kriterij 3.
Zdravilo je najučinkovitejše, če ima najmanjšo vsoto vseh reakcijskih časov.
Predlog za razvrstite glede na kriterij 3: sac, ral, kat, kef.

Preblisk. Vrstni red se ne spremeni, če namesto vsote reakcijskih časov posameznih zdravil uporabimo povprečne vrednosti.

3. Izdelava modela

Razmislimo o modelu. Najučinkovitejše je tisto zdravilo, ki ima najmanjši povprečni reakcijski čas X_s.

Oblikujemo model M: $X_s = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n}$;

x_i je reakcijski čas, n število podatkov, s oznaka za izbrano zdravilo.

preglednica 5: Povprečni reakcijski čas

	kat	sac	ral	kef
	t (min)	t (min)	t (min)	t (min)
Vsota	268	247	256	271
Povprečni reakcijski čas	14,10	13	13,47	14,26

4. Uporaba modela

Uporabimo model M in razvrstimo zdravila po hitrosti učinkovanja: sac, ral, kat, kef.

Ugotovimo.
Po modelu M je najučinkovitejše zdravilo sac. Model je s prilagoditvami uporaben tudi v primeru večjega števila zdravil, pri ugotavljanju učinkovitosti zdravil, pri katerih je pomembna hitrost učinkovanja. Tako je lahko npr. model uporaben tudi, če je pomemben najdaljši reakcijski čas učinkovanja. Razvrstitev je potem ravno obratna.

5. Razmislek o modelu in utemeljitev modela

Pri utemeljevanju modela se kritično vprašamo:
- Je povprečna vrednost res dobra izbira?
- Pri povprečni vrednosti izgubimo informacijo o zelo velikih odklonih.
- Bi bilo v danem primeru smiselno izločiti skrajne vrednosti?

Model bomo testirali še na druge parametre, kot sta *mediana* in *razpršenost podatkov*. Podatke uredimo po velikosti in jih predstavimo v preglednici 6.

Preglednica 6: Reakcijski časi zdravil, urejeni po velikosti

		kat	sac	ral	kef
		t (min)	t (min)	t (min)	t (min)
1.		7	8	7	7
2.		8	8	8	7
3.		9	9	8	7
4.		10	10	8	10
5.	1. kvartil	10	10	9	10
6.		11	11	9	10
7.		12	11	10	10
8.		12	11	10	12
9.		13	11	10	12
10.	mediana	14	12	12	14
11.		14	12	14	17
12.		14	13	15	17
13.		15	13	15	17
14.		17	13	15	18
15.	3. kvartil	18	14	17	19
16.		19	17	19	19
17.		20	19	23	21
18.		22	20	23	22
19.		23	25	24	22

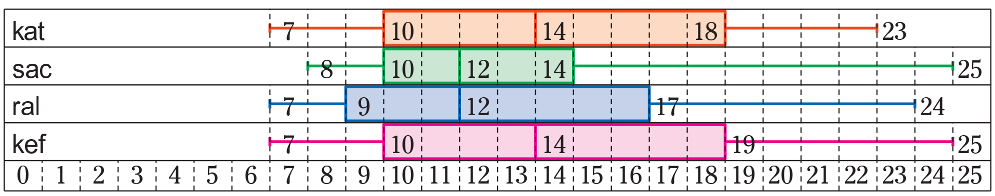
Najnižjo mediano 12 imata sac in ral. To pomeni, da je pri sac in ral polovica vseh reakcijskih časov nižjih od 12.

Razvrstitev zdravila glede na mediano:
sac, ral, kat, kef.

Kaj pa razpršenost podatkov?

Za vse štiri skupine podatkov narišimo diagrame škatle z brki ter jih primerjajmo.

Diagram: Razpršenost podatkov



Kaj kaže analiza razpršenosti podatkov?
- Analiza razpršenosti podatkov pokaže najugodnejšo situacijo za zdravilo sac, saj ima polovica vseh podatkov reakcijske čase v najožjem *razponu* od 10 min do 14 min.
- Tudi analiza zgornje četrtine podatkov pokaže, da ima sac največji razpon, od 14 min do 25 min, z najnižjo vrednostjo tretjega kvartila, 14 min.
- Ugotovimo, da je tudi pri analizi razpršenosti podatkov zdravilo sac najučinkovitejše.

Iz ugotovljenega lahko sklepamo, da je v danem primeru model povprečne vrednosti za ugotavljanje najučinkovitejšega zdravila v veliki meri primeren, saj tudi testiranje na druge parametre, kot sta mediana in razpršenost podatkov, potrdi primernost modela.
Nasploh in tudi v danem primeru ne govorimo o pravilnosti modela niti o dejstvu, da je izdelani model edini možni model, lahko pa ugotovimo, da je predlagani model primeren.

Povzemimo.

Modeliranje je proces.
Pogosto šele po več zaporednih korakih in testiranjih oblikujemo končni model.
Pri empiričnem pristopu modeliranja model postavimo na osnovi zbranih podatkov.

Naloge

39

Proizvajalec mobilnih telefonov želi izboljšati model *SAMX*. Na trg so poslali tri novejše modele.

Zberi podatke in izdelaj model, po katerem bo proizvajalec ugotovil, kateri mobilni telefon znamke SAMX se finančno najbolj izplača izdelovati.

40

Agencija *STANOVANJA* preučuje cene stanovanj. Ugotovili so, da je tržna cena stanovanj povezana z vzorcem cenovnih gibanj nepremičnin v preteklem obdobju, zato za napovedovanje cen uporabljajo empirični model. Zberi podatke o gibanju cen stanovanj za zadnjih pet let v svojem kraju ali regiji in izdelaj model za napoved cene stanovanj za naslednje obdobje.

Izrazi

I

V tem poglavju bomo ponovno računali z *algebrskimi izrazi*.

- Ponovili bomo, kaj so *algebrski izrazi*, in obnovili, kako jih delimo na *enočlenike* in *veččlenike*.
- Obnovili bomo množenje *algebrskega izraza z enočlenikom*, *seštevanje enočlenikov* in *množenje enočlenika z veččlenikom*.
- Ob raziskovanju *množenja veččlenika z veččlenikom* bomo spoznali dva posebna primera: *kvadrat dvočlenika* in *razliko kvadratov*.
- V *izpostavljanju skupnega faktorja dvočlenika* bomo prepoznali *razstavljanje* dvočlenika v zmnožek dveh faktorjev in se naučili, da razstavljanje imenujemo tudi *razcep* ali *faktorizacija*.
- ♦ Spoznali bomo nove načine *razstavljanja* nekaterih *dvočlenikov* in *kvadratnih tričlenikov* v zmnožek dveh faktorjev.

Algebra

- Algebra je veja matematike, ki z uporabo simbolov za števila (najpogosteje so to kar črke) omogoča preučevanje splošnih lastnosti števil, operacij med njimi in enačb.
  Izraz $a + a = 2a$ velja za vse vrednosti spremenljivke a. Na primer:
  $1 + 1 = 2 \cdot 1 = 2$
  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$
  $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ itd.

Izraz $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ velja za vse vrednosti spremenljivk a in b.
Za $a = 1$ in $b = 3$ dobimo:
$(1 + 3)^2 = 1^2 + 2(1 \cdot 3) + 3^2$
$4^2 = 1 + 6 + 9$
$16 = 16$ ✓

- Algebra je tudi most med geometrijo in aritmetiko. Matematikom omogoča, da opisna geometrijska pojasnila zapišemo pregledno v obliki splošnih enačb, npr. Pitagorov izrek $a^2 + b^2 = c^2$, ploščina trikotnika je $p = \frac{a v_a}{2}$ ipd.

Algebro uporabljamo tudi na drugih področjih matematike, npr. v znani teoriji množic, in drugih znanostih.

Iz zgodovine

Začetki algebre, torej uporaba izrazov s spremenljivkami, segajo v 2. in 3. tisočletje pred našim štetjem.

Najdemo jih na egipčanskih hieroglifnih napisih in babilonskih klinopisnih tablicah. Za znake so uporabljali okrajšane besede.

V *Stičišču 8* smo spoznali, da je *algebra* segla do tedanje Evrope na prehodu iz 12. v 13. stoletje po zaslugi latinskega prevoda dela *Al-djabr w'al-mukabala*, ki ga je leta 825 napisal perzijski matematik Mohammed ibn Mûsâ al-Khovârizmî (780–850).

Algebra je dobila ime iz popačitve besede »al-djabr«.

Prvi koraki algebre v Evropi

Razvoj algebre ni bil skokovit, ampak je potekal postopno. Pot ji je utrl italijanski trgovec, svetovni popotnik in matematik Leonardo iz Pise (1170–1230) z vzdevkom Fibonacci.

Leonardo je napisal več del.

- *Računsko knjigo »Liber Abaci«* 1202 je namenil zapisu svojega aritmetičnega znanja, zapisanega z arabskimi številkami.
- *Knjigo kvadratov »Liber Quadratorum«* 1225 je namenil algebri,
- knjigo *Cvet »Flos«* pa razvedrilni matematiki, algebrskim problemom in teoriji števil.

Njegovo delo so začeli ceniti šele v 15. stoletju in njegove knjige veljajo za temeljna dela zahodne matematike. V njegovem času so uporabljali le rimske številke, ki nimajo ničle. Z njimi je bilo težko računati, kar je ustrezalo trgovcem in usposobljenim računarjem, ki si poenostavitve računanja niso želeli.

Spremenljivke

Spremenljivka pomeni v algebri poljubno število, zapisano s črkami: »znana« števila zaznamujemo z $a, b, c \ldots$, neznana števila pa z $x, y, z \ldots$ Število ob spremenljivki v obrazcu $p = 4 \cdot a$ imenujemo *konstanta*, v izrazu $4 \cdot a$ pa koeficient.

Algebrski izrazi

***Algebrski izraz* ali *izraz s spremenljivkami* poimenujemo vsak zapis števil in spremenljivk, ki jih povezujejo znaki računskih operacij seštevanja, odštevanja, množenja, potenciranja in korenjenja. Delitelj pa je lahko samo število. V algebrskih izrazih uporabimo tudi oklepaje.**

Sestaviti izraz pomeni, da govorjeno ali zapisano trditev izrazimo v matematični obliki.
Vrednost izraza s spremenljivko dobimo, ko spremenljivko v izrazu nadomestimo z izbranim številom in izvedemo predpisane operacije.

Poimenovanje algebrskih izrazov

1. **Po operacijah, če v izrazu nastopa le ena operacija:**
- *vsota:* $a + 3,\ 2a + b \ldots$ in *algebrska vsota:* $4a + 2b - \frac{1}{2}c \ldots$,
- *razlika:* $a - 3, a - b \ldots$,
- *produkt:* $3 \cdot a = 3a, a \cdot b = ab, a \cdot (b + c) = a(b + c) \ldots$,
- *količnik:* $a : 3$ ali $\frac{a}{3}$. **Pozor:** $3 : a$ ali $\frac{3}{a}$ za $a \neq 0$ ne sodi med algebrske izraze. Je *algebrski ulomek*,
- *potenca:* $x^2, a^3 \ldots$,
- *koren:* $\sqrt{x^2 + 4} \ldots$

2. **Po številu spremenljivk** ločimo izraze z **eno** $2a + \frac{1}{2}a$, **z dvema** $3a + 2b$, **s tremi** in **z več spremenljivkami**.
3. **Po številu členov v izrazu** ločimo algebrske izraze na *enočlenike* in *veččlenike*.

- *Enočlenik ali člen je lahko število ali več števil, ena ali več spremenljivk ali eno in več števil in spremenljivk hkrati, povezanih z operacijami množenja in potenciranja ter deljenja s številom, različnim od nič. Število, ki je povezano s spremenljivko z množenjem, imenujemo koeficient enočlenika:* $a, 3, abc, a^3, ax^n \ldots$
- *Enočlenik je urejen, če ima na prvem mestu zapisan koeficient, spremenljivke pa urejene po abecednem vrstnem redu.*
- *Podobni enočleniki* so enočleniki, ki imajo *enake spremenljivke*: $2a, \frac{1}{3}a, -0{,}3a \ldots$
- *Veččlenik je algebrski izraz, v katerem so z znaki operacij seštevanja ali odštevanja povezani po dva, trije, štirje ali več enočlenikov. Ločimo:*
- dvočlenike: $a + b, 2a - a^2$, • tričlenike: $a + b + c$, • veččlenike: $a + 3b - 4c + 2d \ldots$

Računanje z izrazi

1. **Seštevanje**. *Seštevamo lahko le podobne enočlenike:* $7a - (2a + 8a) = -3a$.
2. **Množenje enočlenikov**. *Zmnožek enočlenikov je enočlenik.* Dobimo ga tako, da ločeno pomnožimo koeficiente in spremenljivke: $5a \cdot 2ab = 5 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot b = 10a^2b$.
3. **Deljenje enočlenika s številom**. *Koeficient enočlenika delimo s številom:* $(30ab) : 5 = 6ab$.
4. **Množenje veččlenika z enočlenikom**. *Vsak člen veččlenika pomnožimo z enočlenikom:* $(3x^2 - 4x + 5) \cdot 7x = 3x^2 \cdot 7x - 4x \cdot 7x + 5 \cdot 7x = 21x^3 - 28x^2 + 35x^2$.
5. **Izpostavljanje skupnega faktorja**. *Skupni faktor vsakega člena izpostavimo*: $3x^2 \cdot 7x - 4x \cdot 7x + 5 \cdot 7x = 7x \cdot (3x^2 - 4x + 5)$.
6. **Poenostavitev** ali **preoblikovanje izraza**. *V algebrskem izrazu izvedemo vse nakazane računske operacije in razrešimo vse oklepaje:*
$a + a + a = 3 \cdot a$, $\quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $\quad 4 \cdot a : 2 = 4 : 2 \cdot a = 2 \cdot a$.

***Ekvivalentni* ali *enakovredni izrazi* so tisti izrazi, ki imajo enako vrednost za katero koli vstavljeno vrednost vsebovane spremenljivke. Dobimo jih s preoblikovanjem izraza, npr. $3a - a$ v izraz $2a$.**

Grafični prikaz izrazov

S spremenljiko, ki jo prikažemo kot daljico, lahko na podlagi geometrijskih zakonitosti ponazorimo: *vsoto spremenljivk* – s seštevanjem daljic, *množenje dveh spremenljivk* – s ploščino pravokotnika, *kvadriranje spremenljivke* – s ploščino kvadrata, *kubiranje spremenljivke* – s prostornino kocke.

Naloge

Spremenljivke v izrazih, v zaporedjih

1

Premisli in pojasni.

a) Kako imenujemo v matematiki črko, ki lahko predstavlja katero koli število in jo zapišemo s poljubno črko abecede?

b) Kako lahko s črko zapišeš število frnikol, ki so skrite v vreči? Kaj pa, če tem frnikolam dodamo še dve? Kako imenujemo zadnji zapis?

2 *

Zapiši trditev z matematičnimi simboli in jo opiši.

a) Izberi število in ga povečaj za 2. Vse skupaj deli s 3 in odštej trikratnik izbranega števila.

b) Število 7, pomnoženo z $2a$, dá $14a$.

3 *

Nadaljuj zaporedje oblik in ga opiši.
Katera oblika stoji na izbranem mestu?

a) 10. mesto, 41. mesto, splošno n-to mesto

b) 55. mesto, 120. mesto, splošno n-to mesto

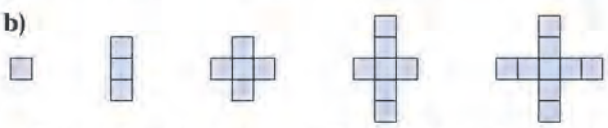
c) 113. mesto, 289. mesto, splošno n-to mesto

4 *

Nadaljuj prikazano zaporedje, sestavljeno iz kvadratkov.

a)

b)



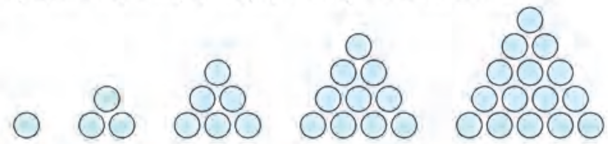
Koliko kvadratkov bo sestavljalo 100. člen zaporedja? Koliko 113. člen in koliko n-ti člen?

5 *

Nadaljuj zaporedje, sestavljeno iz krogov. Izrazi to zaporedje s številskim zapisom in ga opiši. Poišči splošni člen zaporedja, ki stoji na n-tem mestu.

6 *

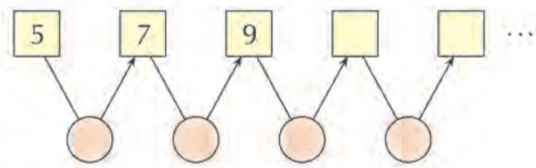
Nadaljuj zaporedje, sestavljeno iz krogov. Izrazi to zaporedje s številskim zapisom in ga opiši. Poišči splošni člen zaporedja, ki stoji na n-tem mestu.



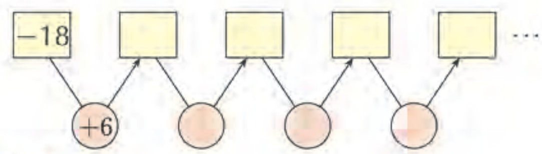
7 *

Dopolni diagram številskega zaporedja.
Kateri člen stoji na n-tem mestu?

a)



b)



8

Razišči zaporedje števil 2, 7, 12, 17, 22, 27 ...
Pomagaj si z diagramom zaporedja.
Zapiši, katero število stoji na n-tem mestu zaporedja.

9

Razišči zaporedje števil 100, 98, 96, 94 ... Zapiši število, ki stoji na 20. mestu in na n-tem mestu.

10

Napiši zaporedje, ki se pričenja s členom 5, vsak nadaljnji člen pa je za 7 večji od prejšnjega.

11

Zapiši vsaj tri prve člene zaporedja in 100. člen, če veš, da stoji na n-tem mestu člen:

a) $n^2 - 1$ **b)** $\frac{n}{n+1}$

12

a) Poišči sedmi člen zaporedja, ki se pričenja s 3, vsak nadaljnji člen pa je za 8 večji.

b) Katero je deseto število v zaporedju, ki se prične z $\frac{1}{7}$, vsak nadaljnji člen pa je za $\frac{2}{5}$ večji?

Poimenovanja, poenostavitve, urejanje izrazov

13 *

Algebrske izraze opiši, poimenuj in poenostavi.

a) $a + a$ **b)** $a \cdot a$
c) $b - a$ **č)** $a - a$
d) $3 \cdot a \cdot b$ **e)** $3 \cdot a - a \cdot 2$
f) $4 \cdot a + a$ **g)** $a + 3 \cdot a + a \cdot (-a)$

14

Kateri od danih izrazov je veččlenik? Poimenuj ga in ga, če se da, poenostavi.

a) $5x^2 + 15x$ **b)** $3 \cdot 7xy$
c) $-3x^2$ **č)** $x^3 + 4x^2 + 13x - 3x + 7$
d) $\frac{3a+c}{x}$ **e)** $-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{5}x + 1$

15

Uredi dane veččlenike in jih, če se da, poenostavi.

a) $2a + b^2 - 3a$ **b)** $d + a - (3c - 2b)$
c) $c + 2c^2 - \frac{1}{2}a$ **č)** $u \cdot u - (-b \cdot 3) + 4a$

16

Poenostavi izraz, če je to mogoče, in pojasni operacije.

a) $7a + a$ **b)** $a + 6$ **c)** $6a + 3b$
č) $4b - 4b$ **d)** $9u^2 + u^2$ **e)** $10u + u$
f) $\sqrt{a} + \sqrt{a}$ **g)** $8a - 8b$
h) $2a^2 + 4a - 2$

Računanje z izrazi

17

Seštej ali odštej dane veččlenike.

a) $(3x + 2x - 6x + 7) + (3 + 5x)$
b) $(4x - x - 5x + 3) - (2 + 5x)$
c) $(2x - 7x + 5x - 3) - (5x - 8)$
č) $(3x^2 + 2x - 5) + (-x^2 - 3x - 4)$
d) $(3x^2 + 2x - 5) - (-x^2 - 3x - 4)$

18 **

V računu je napaka. Popravi jo.

a) $7c + 2 = 9c$ **b)** $5a - a = 5$
c) $8b - 8 = b$ **č)** $-13x + x = -12$
d) $17a + b = 17ab$ **e)** $(xy)^2 = 2xy$
f) $\sqrt{3a^2b} = ab\sqrt{3}$ **g)** $\sqrt{3a^2 + 3b^2} = 3ab$

19

Odpravi oklepaje.

a) $12a + (6b - (4a + 2b))$
b) $-10x - (-9y + (-15x + 2 - 11y))$
c) $-24b - (10 + 16c - (26b + 15c) - 5c)$

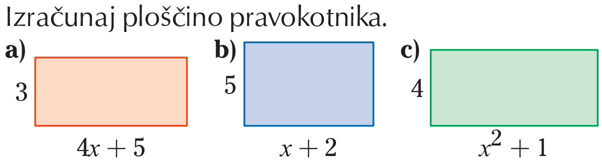
20

Zmnoži dane enočlenike.

a) $3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot 8 \cdot c$ **b)** $-2a \cdot (-4b) \cdot 3a$
c) $2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b$ **č)** $2a \cdot (-3a) \cdot 4b$

21

Izračunaj ploščino pravokotnika.



22

Uporabi razčlenitveni zakon in zmnoži. Kaj predstavlja ta zmnožek v geometrijskem pomenu?

a) $3(3a + 4)$ **b)** $-5(x^2 + 3x - 1)$
c) $(4x - 6)(-7x)$ **č)** $(x^3 - x^2 + x - 1)4x^2$

23

Odpravi oklepaj.

a) $a(2b + 5c)$ **b)** $4x(-3y - 1)$
c) $(-3a)(5b + 4a)$ **č)** $(-x)(-y - xy)$

24 *

Množi s faktorjem (-1).

a) $(-1) \cdot (2x + 3y)$
b) $(6a - 5b) \cdot (-1)$
c) $(-2x - 5y) \cdot (-1)$
č) $(-1) \cdot (3x - 2y + 5z)$
d) $(-1) \cdot (-ac - b^2) \cdot (-1)$

25 *

Izpostavi skupni faktor.

a) $8ax + 16ay$ **b)** $ax - bx$
c) $5a^2 + 5a$ **č)** $6b^2 - 2b$

26 *

Izpostavi faktor (-1).

a) $-7a - 2$ **b)** $-5 - b^2$
c) $-10x - y$ **č)** $-x + y^2$
d) $-a + 2ab - b^2$ **e)** $2a^2 + b^2 + c^2$

Vrednosti izrazov. Ekvivalentni izrazi

27

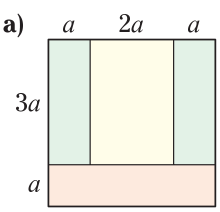
Izračunaj vrednost izrazov.

a) $3x^2 + 5x - 1$; $x = 2$ $x = -1$
b) $2x^2 - 7x + 4$; $x = -1$ $x = 3$

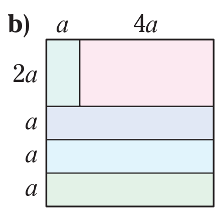
28

Izračunaj ploščino kvadrata s slike za a je 7,4 cm.

a)



b)



29

Pojasni pojem *ekvivalentni* ali *enakovredni* izraz.

30

Napiši vsaj dva ekvivalentna izraza k danemu izrazu.

a) $2x + 3x \cdot (-4x) + 3x - 7$
b) $(-7)(4x + 8x)x$
c) $a(3a^2 + 4a - 1) + a(4a^3 + 6a^2 - 7a + 3)$

Ali velja Jušev nasvet upoštevati?

Pomagaj Bini preveriti Jušev nasvet.

Množenje dvočlenika z dvočlenikom

Zmnožimo dvočlenika $(x + 2)$ in $(x + 3)$.

Premislimo in računamo.

Algebrski način

Če drugo vsoto $x + 3$ v zmnožku $(x + 2)(x + 3)$ označimo z A, v zapisu $(x + 2) \cdot A$ prepoznamo množenje dvočlenika z enočlenikom. Tega po *razčlenitvenem zakonu* preoblikujemo v $xA + 2A$. Ker pa je $A = (x + 3)$, sledi, da bomo zmnožek $(x + 2) \cdot (x + 3)$ izračunali z dvakratno zaporedno uporabo *razčlenitvenega zakona*.

$$\begin{aligned}(x+2)\cdot(x+3) &= x\cdot(x+3)+2\cdot(x+3)\\ &= x\cdot x+x\cdot 3+2\cdot x+2\cdot 3\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+2)\cdot(x+3) &= (x+2)\cdot x+(x+2)\cdot 3\\ &= x\cdot x+2\cdot x+x\cdot 3+2\cdot 3\\ &= x^2+5x+6\end{aligned}$$

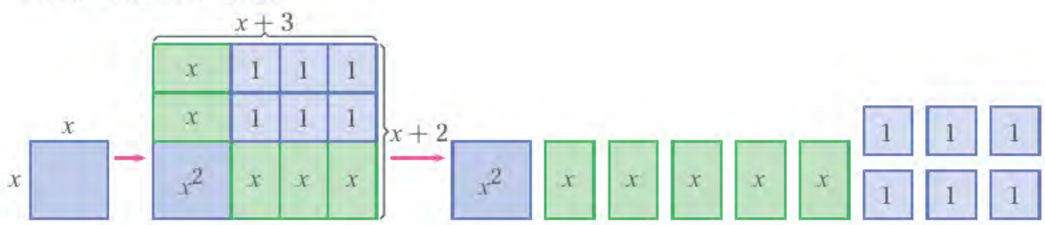
Ugotovili smo.

Dvočlenik pomnožimo z dvočlenikom na algebrski način po *razčlenitvenem zakonu* tako, da vsak člen prvega dvočlenika pomnožimo najprej s prvim, nato pa še z drugim členom drugega dvočlenika. Kateri dvočlenik izberemo za prvega, je zaradi *zakona o zamenjavi faktorjev* vseeno. Delne zmnožke nato uredimo in podobne člene seštejemo.

Kakšen geometrijski pomen ima zmnožek $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$?

Premislimo in rišemo.

Geometrijski način



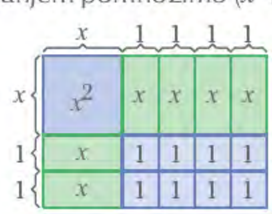
Ugotovimo.

Geometrijska ponazoritev množenja dvočlenikov pokaže, da zmožek vsot ustreza ploščini pravokotnika, katerega dolžini stranic sta izraženi z dvočlenikoma.

1 Zmnožimo. Modro obarvan račun z vajo opustimo.

$$\begin{aligned}&(x+6)(x+9) =\\ &= (x+6)x+(x+6)9\\ &= x^2+6x+9x+54\\ &= x^2+15x+54\end{aligned}$$

2 Z risanjem pomnožimo $(x + 2)(x + 4)$.



- Množimo dvočlenika z različnimi spremenljivkami.
  Namig. Modro obarvan vmesni zapis računanja z vajo opustimo.

3 $(x+4)(y+5) =$
$= (x+4)y + (x+4)5$
$= xy + 4y + 5x + 20$
$= xy + 5x + 4y + 20$

4 $(15c+2d)(3c+7d) =$
$= (15c+2d)3c + (15c+2d)7d$
$= 45c^2 + 6dc + 105cd + 14d^2$
$= 45c^2 + 111cd + 14d^2$

- Pri množenju z *razliko* ali razlikami pazimo na predznake faktorjev.
  Namig. Modro obarvan zapis z vajo opustimo.

5 $(\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y)(4x+12y) =$
$= (\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y)4x + (\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}y)12y$
$= 3x^2 - 2yx + 9xy - 6y^2$
$= 3x^2 + 7xy - 6y^2$

6 $(0{,}5x - 3{,}6y)(0{,}7x - 2{,}3y) =$
$= (0{,}5x - 3{,}6y)0{,}7x - (0{,}5x - 3{,}6y)2{,}3y$
$= 0{,}35x^2 - 2{,}52yx - 1{,}15xy + 8{,}28y^2$
$= 0{,}35x^2 - 3{,}67xy + 8{,}28y^2$

Diagramski način

- Težavam s predznaki in dodatnim razmislekom o pomenu zmnožka se lahko izognemo, če dvočlenika množimo z diagramom, kot kaže zgled na primeru množenja vsot.

7 Zmnožimo z diagramom dvočlenika $(x+2)$ in $(y+3)$.

Množimo z diagramom.

$\cdot$	y	3
x	xy	$3x$
2	$2y$	6

ali

$\cdot$	x	2
y	xy	$2y$
3	$3x$	6

$(x+2)(y+3) = (y+3)(x+2)$
$\Rightarrow\ xy + 3x + 2y + 6$
Zmnožek je *štiričlenik*.

Pojasnimo.
Diagram ima obliko pravokotnika, razdeljenega na štiri dele. Nad vsakim delom in ob njem so zapisi členov dvočlenika – »stranic« manjših delov, ki po dva skupaj ustrezata dvočleniku »*dolžini*« in »*širini*« celotnega pravokotnika, izraženi z vsoto spremenljivke in števila. Končni rezultat množenja dobimo, ko enočlenike, katerih vsak izraža delno ploščino pravokotnika, seštejemo tako, da seštejemo *podobne* enočlenike, če obstajajo.

Povzemimo.

Računanje z diagramom pokaže, da pri množenju dvočlenika z dvočlenikom računamo ploščino pravokotnika, katerega stranici sta dvočlenika.
Zmnožek *dvočlenikov* so delne ploščine, ki so zapisane v štirih delih diagrama.
Njihova vsota je *štiričlenik, tričlenik* ali *dvočlenik*.

8 Zmnožimo dvočlenika $4x-6$ in $3x-1$.

Računamo z diagramom.

$\cdot$	$3x$	-1
$4x$	$12x^2$	$-4x$
-6	$-18x$	$+6$

$\Rightarrow\ 12x^2 - 4x - 18x + 6 =$
$= 12x^2 - 22x + 6$

Odgovorimo. Zmnožek je *tričlenik:* $12x^2 - 22x + 6$.

9 Zmnožimo $-4x - 3y$ in $-4x + 3y$.

Računamo z diagramom.

$\cdot$	$-4x$	$+3y$
$-4x$	$16x^2$	$-12xy$
$-3y$	$+12xy$	$-9y^2$

$\Rightarrow\ 16x^2 - 12xz + 12xy - 9y^2 =$
$= 16x^2 - 9y^2$

Odgovorimo. Zmnožek je *dvočlenik:* $16x^2 - 9y^2$.

- Diagramski način množenja je priročen tudi za množenje večmestnih števil.

10 Zmnožimo 42 z 39 brez žepnega računala.

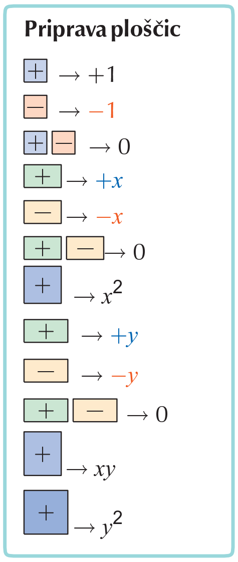
Množimo z diagramom.

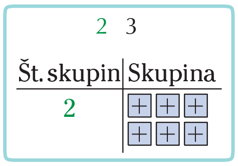
$\cdot$	40	2	
30	1 200	60	1 260
9	360	18	378
			1 638

Opišemo.
Množenje števil z diagramom pokaže, da smo zmnožek števil zapisali kot zmnožek faktorjev $40 + 2$ in $30 + 9$. Vsota delnih zmnožkov ustreza zmnožku danih števil.

Delo s ploščicami

- Nazorna geometrijska slika se pri množenju dvočlenikov z negativnimi členi izgubi. Nasprotno pa se (ne glede na predznake členov dvočlenikov) nazornost ohrani, če demonstriramo množenje dvočlenikov z večbarvnimi ploščicami. Še bolje je, če delo s ploščicami nadomestimo z animacijo na računalniku ali pa ploščice preprosto rišemo.





Opis ploščic za množenje dvočlenikov

Komplet ploščic naj sestavljajo ploščice kvadratne in pravokotne oblike:
enotski kvadrati naj ponazarjajo številske enote: modri pozitivne, rdeči negativne,
različno dolgi zeleni pravokotniki s širino enote naj ponazarjajo različne spremenljivke;
modri kvadrati s stranico spremenljivk naj ponazarjajo kvadrate spremenljivk,
pravokotniki s stranicama dveh spremenljivk naj ponazarjajo zmnožek spremenljivk:
moder ponazarja pozitivni zmnožek, rdeč pa negativnega.

Praktična nasveta

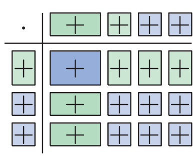
- **Vse ploščice naštetih oblik pobarvajmo tako, da bodo na eni strani pozitivne, torej modre za prikaz števil in zelene za prikaz spremenljivk, na drugi strani pa negativne, torej rdeče.**
- **Priprava ploščic bo preprostejša, če bomo množili dvočlenika z enakima spremenljivkama, ker bomo potrebovali manj raznovrstnih ploščic.**

Operacije

Veljajo predpisi, ki smo jih uvedli v 8. razredu:
- *seštevanje* pomeni **dodajanje** členov,
- *odštevanje* pomeni **odvzemanje**. Če imamo premalo ploščic, ki bi jih morali odvzeti, si pomagamo z dodajanjem *ničelnih parov*.
- *Pri množenju* prvi faktor pomeni vedno **število skupin**. Njegov predznak pomeni: $+$ **dodaj** ploščice tistega predznaka, ki ga zahteva drugi faktor, $-$ **dodaj** ploščice **nasprotnega predznaka**, kot ga zahteva drugi faktor.

11 Zmnožimo dvočlenika z različnima spremenljivkama.

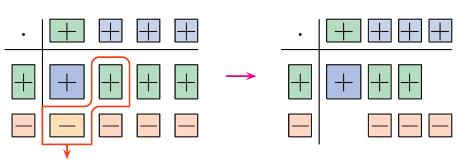
$(x+2)(y+3)$



Opišemo računanje.
- Pripravimo diagram tako, da nastavimo ustrezne ploščice v obe prvi vrstici preglednice,
- zaporedno množimo izraz $y+3$ najprej z x,
- nato še z enotama $2 = 1 + 1$,
- preberemo rezultat, ki je zapisan v preglednici: $xy + 3x + 2y + 6$.

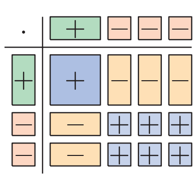
Pogosteje množimo dvočlenika z enakima spremenljivkama.

12 Zmnožimo $(x-1)(x+3)$.



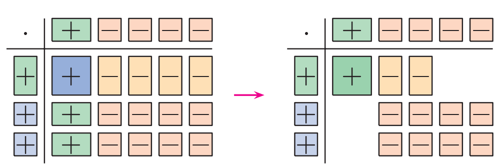
Opišemo računanje.
- Pripravimo diagram,
- izraz $x+3$ množimo najprej z x,
- nato še z enoto -1, zaradi znaka minus pri množenju ploščico obrnemo (spremeni barvo),
- ničelni pari se izničijo,
- rezultat preberemo: $x^2 + 2x - 3$.

13 Zmnožimo $(x-2)(x-3)$.



$(x-2)(x-3) = x^2 - 5x + 6$

14 Zmnožimo $(a+2)(a-4)$. **V dvočleniku se pojavi spremenljivka *a*,** zato ploščica zelen pravokotnik, ki je prej pomenil x, zdaj pomeni a, rdeč pa $(-a)$.



$(a+2)(a-4) = a^2 - 2a - 8$

Naloge

31 *

Uporabi diagram in zmnoži števili tako, da ju zapišeš v razčlenjeni obliki.

a) $42 \cdot 53$ **b)** $98 \cdot 74$ **c)** $82 \cdot 39$

32 *

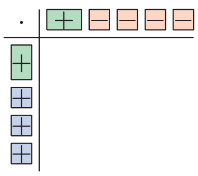
Uporabi diagram in zmnoži dane dvočlenike.

a) $(x+3)(x+6)$ **b)** $(x-3)(x-6)$
c) $(x+3)(x-6)$ **č)** $(x-3)(x+6)$
d) $(-x-3)(x-6)$ **e)** $(-x-3)(-x-6)$

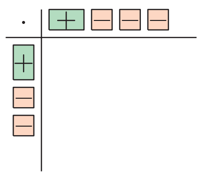
33 *

Nadaljuj z delom, napiši račun in rezultat.

a)



b)



34

1) Uporabi ploščice in zmnoži dane dvočlenike.
2) Rezultat preveri z računanjem z diagramom.

a) $(x+2)(x+4)$ **b)** $(x-2)(x-4)$
c) $(x+2)(x-4)$ **č)** $(x-2)(x+4)$

35 *

Zmnoži vsote na algebrski način. Uporabi zakon o razčlenjevanju. Rezultat preveri z uporabo diagrama.

a) $(x+6)(x+2)$ **b)** $(a+3)(a+8)$
c) $(b+5)(b+3)$ **č)** $(2a+4)(3a+6)$
d) $(2x+7)(x+9)$ **e)** $(2c+6)(3c+4)$

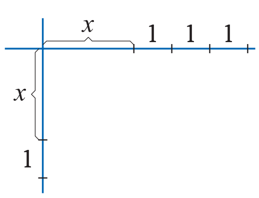
36 *

Zmnoži razlike na algebrski način. Rezultat preveri z množenjem z diagramom.

a) $(x-6)(x-2)$ **b)** $(a-3)(a-8)$
c) $(b-5)(b-3)$ **č)** $(2a-4)(3a-6)$
d) $(2x-7)(x-9)$ **e)** $(2c-6)(3c-4)$

37 *

Nariši pravokotnik s širino $x+n$ in dolžino $x+m$. Za spremenljivki n in m po vrsti izberi n je 3, 4, 5, za m pa 1, 2, 3. Grafično prikaži in zapiši njegovo ploščino. Skica kaže prvi primer za $n=3$ in $m=1$.



Rezultat preveri na algebrski način.

38

Zmnoži na geometrijski način. Uporabi diagram. Rezultat preveri na algebrski način.

a) $(x+2)(2x+1)$ **b)** $(2x+3)(3x+2)$
c) $(3a+1)(2a+3)$ **č)** $(3b+1)(4b+4)$
d) $(4c+2)(3c+2)$ **e)** $(5d+1)(3d+2)$

39

Zmnoži na geometrijski način. Uporabi diagram. Rezultat preveri na algebrski način.

a) $(x-2)(x+1)$ **b)** $(x-3)(x+7)$
c) $(2a-1)(2a+3)$ **č)** $(3b-1)(4b-4)$
d) $(4c-2)(3c-2)$ **e)** $(5d-1)(3d-2)$

40

Zmnoži na algebrski način. Preveri z diagramom. Kaj opaziš?

a) $(c+2d)(4c-8d)$ **b)** $(3a+2b)(8b-12a)$
c) $(6x-4y)(8y+12x)$
č) $(7a^2b+5ab^2)(5ab^2-7a^2b)$

41 *

Vstavi znak minus ali plus in manjkajoči koeficient.

a) $(4+a)(a-5) = \square a^2 \square \square a \square 20$
b) $(4-a)(a-5) = \square a^2 \square \square a \square 20$
c) $(5-a)(7+b) = \square 35 \square \square a \square \square b \square ab$
č) $(5-a)(7-b) = \square 35 \square \square a \square \square b \square ab$

42

Spretno zmnoži.

a) $-4x-a$ in $5y-b$,
b) $-3x-4y$ in $-2y-7x$.

43

Zmnoži dvočlenika. Pazi na koeficiente.

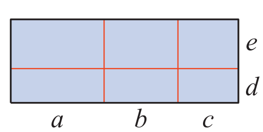
a) $(\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b) \cdot (2a+8b)$
b) $(0{,}5x-2{,}5y) \cdot (0{,}5x+2{,}5y)$

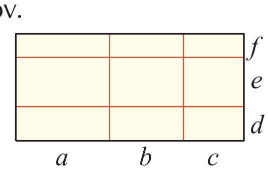
Množenje veččlenika z veččlenikom

Veččlenik pomnožimo z veččlenikom tako, da zakon o razčlenjevanju uporabimo tolikokrat, kolikor členov ima veččlenik, s katerim množimo.

Zmnoži in napiši pravilo.

a) $(a-b+c)(x-y)$
b) $(a^2-2a+1)(a-1)$
c) $(x^2-4x+4)(x-2)$
d) $(x^2+xy)(-x-y)$
e) $(5x-3y+2z)(10x+6y+4z)$
f) Izračunaj ploščini likov.





2 Spoznavamo Zmnožek vsote in razlike. Kvadrat dvočlenika

Kakšen obrazec je odkrila Pika? Dopolni njen zapis.

Kako bo bistri in spretni Jon preveril Pikin obrazec?

Zmnožek vsote in razlike dveh enočlenikov

Zmnožimo vsoto $a + b$ in razliko $a - b$ enočlenikov a in b. Kaj dobimo?

Naredimo načrt in računamo.
Vsota enočlenikov a in b ter njuna razlika sta dvočlenika. Te znamo množiti na več načinov. Uporabimo pravilo diagrama in algebrsko pravilo *razčlenitvenega zakona.*

Množimo z diagramom

$(a + b)(a - b) \Rightarrow$

$\cdot$	a	b
a	a^2	ab
$-b$	$-ab$	$-b^2$

$\Rightarrow a^2 - b^2$

Po razčlenitvenem zakonu

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= a(a - b) + b(a - b)\\ &= a^2 - ab + ab - b^2\\ &= a^2 - b^2\end{aligned}$$

Ugotovimo.
Zmnožek vsote in razlike, sestavljenih iz enakih enočlenikov, je *dvočlenik*, ki je enak *razliki kvadratov* danih enočlenikov. To ugotovitev zapišimo z obrazcem in si jo zapomnimo.

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

***Zmnožek vsote** $a + b$ **in razlike** $a - b$* **je enak *razliki kvadratov* teh enočlenikov:**

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

1 Zapišimo kot razliko dveh kvadratov.
Uporabimo obrazec.
- $(a - 3)(a + 3) = a^2 - 9$
- $(2x - 3y)(2x + 3y) = 4x^2 - 9y^2$
- $(xy - 3a)(xy + 3a) = x^2y^2 - 9a^2$
- $(2x^2 - 3y^3)(2x^2 + 3y^3) = (2x^2)^2 - (3y^3)^2 = 4x^4 - 9y^6$

2 Zmnožimo $62 \cdot 58$ kot zmnožek vsote in razlike.

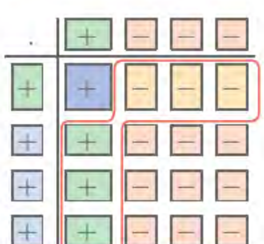
Spretno sestavimo dvočlenika in množimo.

$$\begin{aligned}62 \cdot 58 &= (60 + 2)(60 - 2)\\ &= 60 \cdot 60 - 2^2\\ &= 3\,600 - 4\\ &= 3\,596\end{aligned}$$

3 Računamo lahko tudi s ploščicami.

Postavljamo ploščice ali rišemo.

$(x + 3)(x - 3) \Rightarrow$

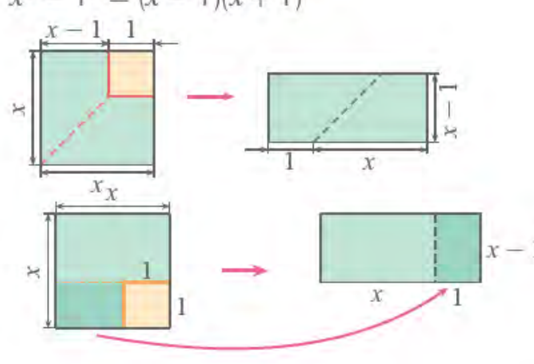


$\Rightarrow x^2 - 9$

4 Prikažimo zmnožek še geometrijsko.

Režemo, premikamo, lepimo.

$x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$



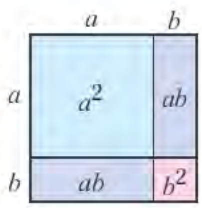
Kvadrati dvočlenikov

Izračunajmo ploščino kvadrata, ki ga dobimo tako, da kvadratu s stranico a enkrat stranico povečamo za b, drugič pa zmanjšajmo za b.

Premislimo, narišimo in s slike preberimo.

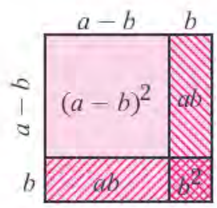
Ker je ploščina kvadrata s stranico a enaka a^2, bo ploščina kvadrata

- za b daljšo stranico enaka:
  $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$



$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2$

- za b krajšo stranico enaka:
  $(a - b)(a - b) = (a - b)^2$



$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2$

Ugotovimo in se dogovorimo.

Iz opisa, s slike in iz algebrskega zapisa vidimo, da v obeh primerih množimo med seboj enaka dvočlenika. Množenje zato lahko zapišemo s potenco in se dogovorimo:

Množenje enakih dvočlenikov imenujemo *kvadrat dvočlenika*.
Če je dvočlenik *vsota*, ga imenujemo *kvadrat vsote*,
če je *razlika*, pa *kvadrat razlike*.

Kvadrat vsote
$(a+b)^2 =$
$= a^2 + 2ab + b^2$

Kvadrat razlike
$(a-b)^2 =$
$= a^2 - 2ab + b^2$

***Kvadrat dvočlenika* je *tričlenik*, ki ga sestavljajo *kvadrat* prvega člena, *dvakratni produkt* prvega in drugega člena ter *kvadrat* drugega člena.**
***Kvadrat vsote* $(a + b)^2$ in *kvadrat razlike* $(a - b)^2$ se razlikujeta le v predznaku drugega člena:**

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

5 Oba obrazca preverimo še z diagramom in algebrsko po *razčlenitvenem zakonu*.

Računamo.

Kvadrat vsote: $(a + b)^2$

·	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2$

Algebrski način:

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 + ab + ab + b^2\\ &= a^2 + 2ab + b^2\end{aligned}$$

Kvadrat razlike: $(a - b)^2$

·	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ab$	b^2

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2$

Algebrski način:

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 - ab - ab + b^2\\ &= a^2 - 2ab + b^2\end{aligned}$$

Ugotovimo. *Kvadrat vsote* in *kvadrat razlike* sta *tričlenika*. Razlikujeta se le v predznaku drugega člena. Obrazca sta povezana:

$$(x - a)^2 = (x + (-a))^2 = x^2 + 2x(-a) + (-a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$$

Pozor, predznaki!
Pri računanju *kvadrata dvočlenika* pazi, ali računaš kvadrat *vsote* ali *razlike*.

6 Kvadrirajmo število 89.

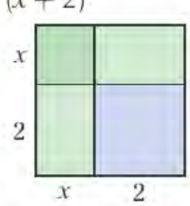
$89^2 = (80 + 9)^2$

·	80	9
80	6 400	720
9	720	81

6 400+1 440+81 = 7 921

7 Kvadrirajmo z risanjem.

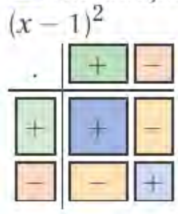
$(x + 2)^2$



$\Rightarrow x^2 + 4x + 4$

8 Kvadrirajmo s ploščicami.

$(x - 1)^2$



$\Rightarrow x^2 - 2x + 1$

9 Računajmo algebrsko.

a) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b) $(a+0{,}1)^2 = x^2 + 0{,}2a + 0{,}01$

c) $(3x^3 + 2y)^2 = 9x^6 + 12x^3y + 4y^2$

č) $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

d) $(x - \frac{3}{4})^2 = x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}$

e) $(5x^2 - 3y)^2 = 25x^4 - 30x^2y + 9y^2$

10 Kvadrirajmo in pazimo na predznake členov dvočlenikov.

a) $(-x+y)^2 = (-x)^2 + 2((-x)y) + y^2$
$= x^2 - 2xy + y^2$

b) $(-2a - 7b)^2 =$
$= (-2a)^2 + 2((-2a)\cdot(-7b)) + (-7b)^2$
$= 4a^2 + 28ab + 49b^2$

11 Uporaba diagrama računanje poenostavi.

$\cdot$	$-2xy$	$-4uz$
$-2xy$	$4x^2y^2$	$+8xyuz$
$-4uz$	$+8xyuz$	$16u^2z^2$

$\Rightarrow 4x^2y^2 + 16xyuz + 16u^2z^2$

Naloge

44

Preberi enačbe z diagramov, ki jih kažejo različni vzorci množenja dvočlenika z dvočlenikom.

a)

$\cdot$	c	3
c	c^2	$3c$
3	$3c$	9

b)

$\cdot$	a	-4
a	a^2	$-4a$
-4	$-4a$	16

c)

$\cdot$	a	$7b$
a	a^2	$7ab$
$-7b$	$-7ab$	$-49b^2$

45

Zmnoži po pravilu o zmnožku vsote in razlike.

a) $96 \cdot 84$ **b)** $37 \cdot 63$ **c)** $81 \cdot 39$

46

Dopolni diagram, izpiši in navedi rezultat.

a)

$\cdot$	c	b
c		
b		

b)

$\cdot$	$2x$	$-3a$
$2x$		
$-3a$		

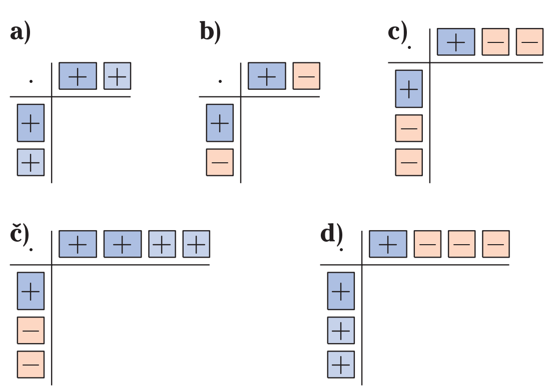
c)

$\cdot$	x	$-2a$
x		
$+2a$		

47

Uporabi ploščice in zmnoži. Kaj dobiš?

Namig. Če ploščic nimaš, rešuj nalogo z risanjem.



48

Dopolni zapis z ustreznima računskima znakoma.

a) $(x+4)^2 = x^2 \square 8x \square 16$

b) $(x-4)(x+4) = x^2 \square 16$

c) $(y-2a)^2 = y^2 \square 4ya \square 4a^2$

č) $(y-2a)(y+2a) = y^2 \square 4a^2$

49

Uporabi obrazec in dopolni zapis.

a) $(a+3)^2 = a^2 + 6a + \square$

b) $(b-4)^2 = b^2 - 8b + \square$

c) $(c-5)^2 = c^2 - \square + 25$

č) $(3+d)^2 = 9 + \square + d^2$

50 **

Kvadriraj z obrazcem. Rezultat preveri z delom s ploščicami ali z diagramom množenja.

a) $(a+11)^2$, $(c+17)^2$ **b)** $(b-14)^2$, $(x-19)^2$

51

Izračunaj dane produkte vsote in razlike.

a) $(a+7)(a-7)$, $(u+6)(u-6)$ **b)** $(x-5)(x+5)$, $(m-3)(m+3)$

52

Kvadriraj dvočlenik. Kaj dobiš? Uporabi obrazec in se ga nauči na pamet. Nalogo doma reši glasno, in to čim hitreje.

a) $(a+n)^2$ za $n = 1, 2 \ldots 10$

b) $(a-n)^2$ za $n = 1, 2 \ldots 10$

53

Izračunaj na algebrski in geometrijski način.

a) $(x+1)^2$ **b)** $(x-1)^2$

c) $x^2 - 1$ **č)** $x^2 - 4$

54

Uporabi obrazec in kvadriraj vsote.

a) $(m+n)^2$ **b)** $(2m+6n)^2$
c) $(u+v)^2$ **č)** $(3u+4v)^2$

55

Uporabi obrazec in izračunaj kvadrat razlike.

a) $(a-b)^2$ **b)** $(2b-3g)^2$
$(x-z)^2$ $(3b-4m)^2$

56 **

Gre tudi z znaki. Preizkusi.

a) $(\triangle+\square)^2$ **b)** $(\bigcirc-\square)^2$
$(\triangle+\bigcirc)(\triangle-\bigcirc)$ $(\triangle+\bigcirc)^2$
$(\triangle-\diamond)^2$ $(\diamond-\bigcirc)(\bigcirc+\diamond)$

57

Dopolni. Najhitreje gre, če obvladaš ustrezne obrazce.

a) $(5a+12)^2=25a^2+\square+\square$
b) $(10b-3)^2=100b^2-\square+\square$
c) $(12-15c)(12+15c)=\square-\triangle$

58 *

Dopiši manjkajoči člen v izrazu, ki je rezultat kvadrata dvočlenika. Napiši tudi ustrezni kvadrat.

a) $4x^2+\square+1$ **b)** $16b^2-\square+49$
c) $25x^2-\square+4$ **č)** $49y^2-\square+49$
d) $121y^2-\square+1$ **e)** $64u^2z^2+\square+16$
f) $81-\square+25a^2$ **g)** $144c^2-\square+9d^2$
h) $1-\square+225a^2$ **i)** $169c^2-\square+4$

59 *

Vse, kar ni prav, popravi.

a) $(5x+y)^2=5x^2+5yx+y^2$
b) $(4x-y)^2=16x^2+8xy-y^2$
c) $(3-3a)^2=9-6a-9a^2$
č) $(a-12)^2=a^2-12a+144$
d) $(2+3x)(2-3x)=4-6x^2$
e) $(m-2n)(m-2n)=m^2-2n^2$

60 *

Izračunaj. Za preizkus so ob strani zapisane vrednosti vsot koeficientov.

a) $(2x+3y)^2$	25
b) $(8a-12b)^2$	16
c) $(8u-9v)^2$	1
č) $(7x-3y)(7x+3y)$	40
d) $(5c+6d)^2$	121
e) $(17m+16n)(17m-16n)$	33
f) $(13a-20b)^2$	49
g) $(-10m+11n)^2$	1

61

Računaj brez računala. Uporabi diagram ali obrazca za kvadrat vsote in kvadrat razlike, kot kaže zgled.

$$55^2=(50+5)^2=$$
$$=50^2+2\cdot 50\cdot 5+5^2=$$
$$=2\,500+500+25=$$
$$=3\,025$$

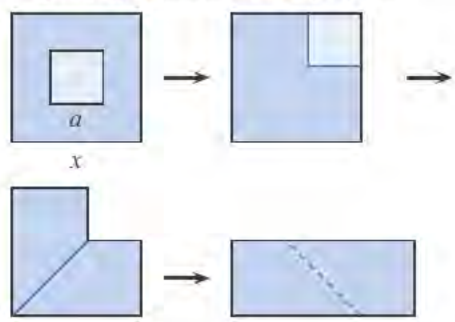
a) 63^2 **b)** 49^2 **c)** 98^2
71^2 58 72^2
34^2 67^2 86^2

62

a) Kako poimenuješ izraz, ki ga dobiš pri množenju dvočlenika z dvočlenikom, če so vsi členi obeh dvočlenikov različni? Navedi primer.
b) Kako poimenuješ izraz, ki ga dobiš kot rezultat pri kvadriranju dvočlenika? Navedi primer.
c) Kako poimenuješ izraz, ki ga dobiš kot rezultat množenja vsote in razlike dvočlenika, sestavljenega iz enakih členov? Navedi primer.

63 **

Razloži matematični strip. Kaj prikazuje? Dopolni ga z oznakami in pojasni.



64

Spretno kvadriraj.

a) 105^2 **b)** 199^2 **c)** 396^2
č) 703^2 **d)** 283^2 **e)** 297^2

65

Izračunaj. Pazi, v izrazu je ulomek.

a) $(a+\frac{1}{2})^2$ **b)** $(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$
c) $(b-\frac{1}{3})(b+\frac{1}{3})$ **č)** $(\frac{1}{2}a+b)^2$

66

Izračunaj. Pazi na predznake členov.

a) $(-x+7)^2$ **b)** $(-a-4)^2$
c) $(-a+5)(a+5)$ **č)** $(-2x+y)^2$
d) $(-3+x)(x+3)$ **e)** $(-a+8)(-a-8)$

Razstavljanje

Opomba: *Razstavljanje* ali *faktorizacijo* imenujemo pogosto tudi *razcep*.

1. *Razcepiti število* pomeni zapisati število z zmnožkom njegovih *prafaktorjev*.

- *Prafaktor* je faktor v zmnožku, ki ga ni več mogoče razcepiti dalje, torej je *praštevilo*.
- *Sestavljeno število* lahko zapišemo kot produkt samih prafaktorjev.
- Vsako sestavljeno število lahko *razstavimo* ali *razcepimo* na **en sam** razcep na prafaktorje, če ne upoštevamo vrstnega reda zapisa. To lahko storimo na več načinov.

S produkti

$80 = 2 \cdot 40$
$80 = 2 \cdot 2 \cdot 20$
$80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10$
$80 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$
$80 = 2^4 \cdot 5$

Z diagramom deljenja

$$\begin{array}{r|l} 210 & 2 \\ 105 & 5 \\ 21 & 7 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$

Z drevesnim diagramom

- *Skupni delitelj* je delitelj, ki hkrati deli dve števili ali več števil.
- *Največji skupni delitelj* dveh števil ali več števil je največje število, s katerim so ta števila deljiva.
- *Tuji si števili* imenujemo števili, ki imata za skupni delitelj le število 1.

2. *Razstaviti* ali *faktorizirati enočlenik* pomeni zapisati enočlenik kot zmnožek vseh faktorjev, ki so faktorji koeficienta ali faktorji spremenljivk.

Primer: Enočlenik $6x^3$ *razstavimo* na zmnožek $2 \cdot 3 \cdot x \cdot x \cdot x$. Preostali faktorji so vse mogoče kombinacije vseh faktorjev: $1, 2, 3, 6, x, 2x, 3x, 6x, x^2, 2x^2, 3x^2, 6x^2, x^3, 2x^3, 3x^3, 6x^3$.

Faktorji enočlenika ax^n so faktorji koeficienta a in faktorji spremenljivke x^n od $x, x^2, x^3, \ldots$ do x^n in vseh mogočih kombinacij zmnožkov teh faktorjev.

3. *Razstaviti* ali *faktorizirati* veččlenik pomeni izpostaviti skupni faktor vseh njegovih členov.

Razstavimo razliko

$30x - 15x^2 =$
$= 15x \cdot 2 - 15x \cdot x$
$= 15x(2 - x)$

Razstavimo vsoto

$4x^2 + 8x =$
$= 4x \cdot x + 4x \cdot 2$
$= 4x(x + 2)$

Geometrijski prikaz razstavitve vsote

	x	2
$4x$	$4x^2$	$8x$

Povezava množenja in razstavljanja

Množenje praštevil

$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$

Z množenjem praštevil smo dobili *sestavljeno število*.

Razcep sestavljenega števila

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Z zaporednim deljenjem števila z ustreznimi praštevili smo število *razcepili* na *prafaktorje*.

Množenje enočlenikov

$2 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b = 10ab^2$

Z množenjem enočlenikov smo dobili *enočlenik*.

Razstavljanje enočlenikov

$10ab^2 = 2 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b$

Z zaporednim deljenjem smo razstavili koeficient enočlenika na zmnožek praštevil in zmnožek posameznih spremenljivk.

Množenje enočlenika z veččlenikom

$(a + b)x = ax + bx$ $(a + x)x = ax + x^2$

Dvočlenik smo množili z enočlenikom po *pravilu o razčlenjevanju*. Z njim smo odpravili oklepaj in dobili *dvočlenik*.

Izpostavljanje skupnega faktorja veččlenika

$ax + bx = x(a + b)$ $ax + x^2 = x(a + x)$

Ko smo izpostavili skupni faktor obeh členov dvočlenika, smo dobili zmnožek dveh faktorjev: izpostavljenega enočlenika in preostalega dvočlenika.

Naloge

Razcep števil

67 *

Napačno trditev popravi, pravilno potrdi in napiši primer.

a) Vsako število lahko zapišemo kot zmnožek vsaj dveh faktorjev.
b) Vsako praštevilo lahko zapišemo kot zmnožek samih prafaktorjev.
c) Vsakega sestavljenega števila ne moremo zapisati kot zmnožek samih prafaktorjev.

68

Ponovi in zapiši pravila za deljivost naravnih števil, ki jih že dobro poznaš. To so pravila za deljivost z 2, 4, 5, 8, 10, 100, 1 000, 3, 9, 6, 25.

69

Na pamet razcepi števila na prafaktorje.
Uporabi poštevanko in zapis s potencami.

a) 16, 15, 56, 42, 75, 110
b) 144, 289, 225, 324, 169, 441

70

Dopolni zapis in s tem razcepi število na same prafaktorje.

a) $24 = 2 \cdot \square \cdot \square \cdot \square$
b) $120 = \square \cdot 3 \cdot \square \cdot \square \cdot \square$
c) $16 = 2 \cdot \square \cdot \square \cdot \square = \square^{\square}$
č) $70 = \square \cdot 5 \cdot \square$
d) $105 = \square \cdot \square \cdot 7$
e) $450 = \square \cdot 3^{\square} \cdot \square^{\square}$

71 *

Razcepi število z diagramom deljenja in ga zapiši z zmožkom. Ne pozabi na potence.

a) 420 **b)** 360 **c)** 540 **č)** 16 170

72

Poišči največji skupni faktor danih števil.

a) 15 in 21 **b)** 7 in 17 **c)** 1 540 in 1470

73

Razišči vzorec števil. Kaj opaziš?

11, 111, 1 111, 11 111, 111 111

Razstavljanje enočlenikov

74

Razstavi enočlenik na vse mogoče pozitivne faktorje.

a) $9x$ **b)** $12x^2$ **c)** $24a^2b^3$ **č)** $2a^4$

75

Zapiši dani enočlenik kot eno potenco.

$25,\ 16a^8,\ b^{16},\ 36x^2y^2,\ 121x^4,\ a^6b^6$

76

S katero operacijo poenostaviš faktoriziran enočlenik? Navedi primer.

77

Poišči največji skupni faktor danih enočlenikov.

a) 15 in 24
b) $7ab$ in $21ab$
c) $8x^2$ in $24y^2$
č) $4x$, $16x^3$ in $8x^2$
d) $2x^7$ in $3x^{17}$
e) $55a$ in $77b$

78

Dopolni enačbe množenja. Kaj dobiš, če rešeno enačbo »bereš« z desne proti levi?

a) $(3x^2)(3x^5) = \square$
b) $(5a^3)(\square) = 20a^7$
c) $(-7b^4)(\square) = 35ab$
č) $(-2ba^2)(-a^3) = \square$

Izpostavljanje skupnega faktorja veččlenika

79

Izpostavi največji skupni faktor dvočlenika.
Preveri pravilnost rešitve.

a) $5x - 10$
b) $10 - 15x$
c) $3x^4 + x^3$
č) $6x^2 + 24x$
d) $12a + 8a^2$
e) $-9c^2 - 3c^3$
f) $c^5 - ca^3$
g) $a^4 + 2a^3$
h) $14a^2 + 4a$
i) $27a - 9b$

80

Slika kaže, kako je sestavljen pravokotnik. Kolikšni sta dolžini njegovih stranic? Zapiši z izrazom.

a)

x^2	x	x	x	x

b)

x	1
x	1
x	1

c)

x^2	x	x	x

č)

x^2	x^2	x	x

81

Tričlenik zapiši kot zmnožek.
Namig: Zmnožek dobiš, ko izpostaviš največji skupni faktor členov.

a) $5a^3 + 6a^2 + 8a$
b) $8a + 2a^2 + 4a^3$
c) $2b^2 - 4b + 6$
č) $7b^2 - 14b + 21$

82

Preoblikuj izraz v produkt enočlenika z veččlenikom.

a) $121x + 88$
b) $30a^3 + 24a^2 - 12a$
c) $12a^2 - 144a$
č) $3b^3 + 6b^6 - 9b^9$

83

Zapiši veččlenik kot zmnožek treh faktorjev.
Namig: Rešuj z večkratnim spretnim izpostavljanjem skupnega faktorja.

a) $x^4 + x^3 + x^2 + x$
b) $a^5 - a^4 + a^3 - a^2$
c) $a^8 + a^6 + a^4 + a^2$
č) $6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x$

Pojasni Ani, kaj je mislil Martin z obratno nalogo.

Ali lahko dodaš Martinovi »obratni« nalogi še kako drugačno nalogo?

♦ Razstavljanje kot preoblikovanje zmnožkov

Pokažimo, da vrednost zmnožka dveh *dvočlenikov* lahko preoblikujemo v nakazano množenje. Dogovorimo se, kako bomo poimenovali to preoblikovanje.

Zmnožek vsote in razlike
⇕
Razstavljanje razlike kvadratov

Zmnožimo *vsoto* in *razliko* enakih enočlenikov. ⟺ *Razliko kvadratov* zapišemo kot zmnožek vsote in razlike enakih enočlenikov.

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Preverimo.

$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
b	ab	$-b^2$

Zmnožek smo zapisali kot *razliko kvadratov*.

Preverimo.

$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
b	ab	$-b^2$

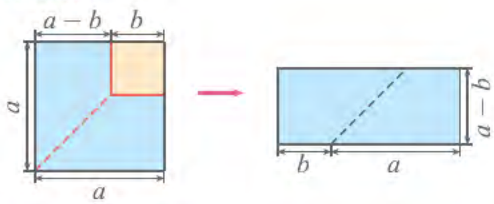
Razliko kvadratov smo zapisali kot zmnožek *vsote* $a+b$ in *razlike* $a-b$ dvočlenikov, sestavljenih iz enakih enočlenikov.

Preoblikovanje *razlike kvadratov* v zmnožek *vsote* in *razlike* enakih enočlenikov imenujemo *razstavljanje*, tudi faktorizacija ali *razcep*.

Sinonimi:
razstavljanje ali *faktorizacija* ali *razcep*

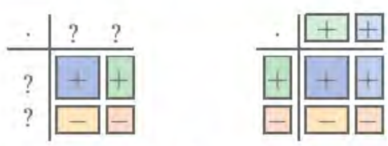
1 Faktorizacijo *razlike kvadratov* $a^2 - b^2$ ponazorimo s ploščinami likov in ploščicami.

Rišemo.



Preberemo s slike.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

Faktoriziramo s ploščicami.



Preberemo s slike.
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

2 Faktorizirajmo $a^2 - 9$.

Uporabimo formulo.

a) $a^2 - 9 = (a+3)(a-3)$
b) $a^4 - 9b^2 = (a^2 + 3b)(a^2 - 3b)$

3 Faktorizirajmo $a^2 + 9$.

Računamo.

$\cdot$	a	3
a	a^2	? $3a$
3	? $3a$	9

Ugotovimo.

$(a+3)(a+3) = a^2 + 6a + 9$
⇓
$a^2 + 9 \neq (a+3)(a+3)$

Povzamemo in si zapomnimo.

Vsota kvadratov enočlenikov ($a^2 + b^2$) se ne da razstaviti.

4 Razstavimo dana izraza.

$2x^2 - 18 = 2(x^2 - 9)$ izpostavimo 2
$= 2(x+3)(x-3)$ razstavimo

$4x^2 + 16 = 4(x^2 + 4)$ le izpostavimo 4.

Kvadrat vsote in kvadrat razlike

⇳

Razstavljanje tričlenika kvadrata vsote in kvadrata razlike

♦ Raziščimo, kako lahko tudi *kvadratni tričlenik* $a^2 + 2ab + b^2$ *razstavimo* na *kvadrat dvočlenika*.

Kvadrat dvočlenika $\Longleftrightarrow$ Razstavljanje tričlenika

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

Preverimo.

$\cdot$	a	$+b$
a	a^2	$+ab$
$+b$	$+ab$	b^2

Preverimo.

$\cdot$	a	$+b$
a	a^2	$+ab$
$+b$	$+ab$	b^2

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Preverimo.

$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ab$	b^2

Preverimo.

$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ab$	b^2

S kvadriranjem dvočlenika smo dobili *tričlenik*.

Tričlenik smo zapisali s *kvadratom dvočlenika*.

Zapomnimo si.

Če je *tričlenik kvadrat vsote:* $a^2 + 2ab + b^2$ ali *razlike:* $a^2 - 2ab + b^2$, ga lahko *razstavimo* na kvadrat dvočlenika, ki ima za prvi člen koren prvega člena tričlenika, za drugi člen pa koren tretjega člena tričlenika.

5 Če je mogoče, zapišimo dane tričlenike kot *kvadrat dvočlenika*. Moder zapis z vajo opustimo.

a) $4x^2 + 20x + 25 = (2x)^2 + 2(2x \cdot 5) + (5)^2 = (2x + 5)^2$

b) $x^2 + 4x + 16 \neq (x)^2 + 2(x \cdot 4) + (4)^2 = (x + 4)^2$

c) $16a^4 - 8a + 1 = (4a^2) - 2(4a) + (1)^2 = (4a^2 - 1)^2$

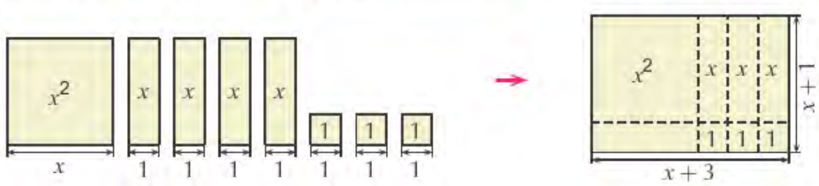
Zmnožek dveh različnih dvočlenikov

⇳

Razstavljanje tričlenika zmnožka dveh različnih dvočlenikov

♦ Raziščimo, ali lahko razstavimo tudi tričlenike, npr. $x^2 + 4x + 3$, ki niso *kvadrati vsote* niti *kvadrati razlike*.

S sliko pokažimo, da je to mogoče v vseh primerih, ko so členi tričlenika izraženi s ploščino takih in toliko likov, s katerimi se lahko sestavi pravokotnik.



Ugotovili smo. $x^2 + 4x + 3 = (x + 3)(x + 1)$

Povzemimo.

Množenje dvočlenikov $\Longleftrightarrow$ Razstavljanje tričlenika

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ $\quad$ $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

$\cdot$	x	b
x	x^2	bx
a	ax	ab

$\cdot$	x	b
x	x^2	bx
a	ax	ab

Z množenjem dveh dvočlenikov smo dobili *tričlenik*.

Tričlenik smo razstavili na zmnožek dveh dvočlenikov.

6 Razcepimo tričlenik $x^2 + 5x + 6$ na dva načina.

1. način – rešujemo z diagramom

Pripravimo diagram in iščemo ustrezne člene razcepa.

$\cdot$	x	?
x	x^2	□
?	◯	6

$6 = ◯ \cdot □$

$\cdot$	x	6
x	x^2	□
1	◯	6

$6 = 1 \cdot 6$ ✓

$\cdot$	x	3
x	x^2	$3x$
2	$2x$	6

$6 = 2 \cdot 3$ ✓

$\cdot$	x	2
x	x^2	$2x$
3	$3x$	6

$6 = 3 \cdot 2$ ✓

Ugotovimo. Tričlenik $x^2 + 5x + 6$ smo razcepili v zmnožek $(x + 2)(x + 3)$.
Rešitev lahko zapišemo tudi z $x^2 + 5x + 6 = (x + 3)(x + 2)$, kar pove, da za množenje velja *zakon o zamenjavi faktorjev*.

2. način – algebrsko reševanje

Pripravimo shemo razcepa.

$1x^2 + 5x + 6 = (1x \quad □)(1x \quad ◯)$ Razcep 3. člena 6 dá ustezno faktorizacijo.

6	2
3	3
1	

Preverimo možnosti pisno ali le v mislih.

$6 = 1 \cdot 6$
$(x + 1)(x + 6)$
x, $6x$
$x^2 + 7x + 6$

$6 = 2 \cdot 3$
$(x + 2)(x + 3)$
$2x$, $3x$
$x^2 + 5x + 6$ ✓

$6 = 2 \cdot 3$
$(x + 3)(x + 2)$
$3x$, $2x$
$x^2 + 5x + 6$ ✓

Ugotovimo. Tričlenik $x^2 + 5x + 6$ smo razcepili na $(x + 2)(x + 3)$.

V praksi postopek reševanja skrajšamo, kot kaže zgled.

7 Faktorizirajmo tričlenik $x^2 + 3x - 4$.

Shemo faktorizacije po razcepu tretjega člena tričlenika v dveh korakih dopolnimo.

$1x^2 + 3x - 4 = (x \quad 1)(x \quad 4) \Rightarrow 1x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x + 4)$

−4	2
−2	2
−1	−1
1	

Razcep
$x^2 + 3x - 4 =$
zunanji produkt
$+(1x - 1)(1x + 4)$
notranji produkt

Opišemo postopek.
Nakazani množenji koeficientov na sliki ob strani pokažeta, da moramo od mogočih razcepov tretjega člena izbrati koeficienta -1 in 4. Njuna vsota je 3: $4 + (-1) = 3$; oba produkta -4: $4 \cdot (-1) = -4$ in $-1 \cdot 4 = -4$ pa sta enaka zmnožku -4, to je tretjemu členu.

Ugotovimo. Zmnožek $(1x - 1)(1x + 4)$ je faktorizacija tričlenika $x^2 + 3x - 4$.

Povzamemo in si zapomnimo.

Opisani razcep kvadratnega tričlenika v zmnožek dvočlenikov, imenujemo *Vietovo pravilo*.

Kvadratni tričlenik s koeficientom 1 kvadratnega člena $1x^2 + bx + c$ ***razstavimo*** **v zmnožek dvočlenikov** $(1x - □)(1x - ◯)$ **tako, da za koeficienta razcepa □ in ◯ velja:**
1 člen tričlenika brez spremenljivke c je enak zmnožku faktorjev razcepa,
2 člen tričlenika drugega člena b pa njuni vsoti.
$1x^2 + bx + c = (1x + □)(1x + ◯)$, **če velja:** $□ \cdot ◯ = c$ **in hkrati** $□ + ◯ = b$

Razmisli, kako bi razstavil razcepen splošni tričlenik $ax^2 + bx + c$, npr. $6x^2 - x - 12$.

Naloge

84

Zmnoži dvočlenika. Kaj dobiš?

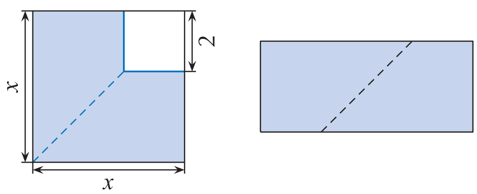
a) $(a-7)(a+7)$ **b)** $(3b+2)(3b-2)$
c) $(a-b^2)(a+b^2)$ **č)** $(1+ac)(1-ac)$

85♦

Imenuj postopek, s katerim rezultat množenja dveh dvočlenikov prevedeš nazaj v njun zmnožek.

86♦

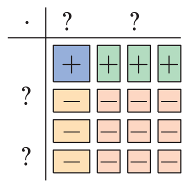
Imenuj geometrijsko faktorizacijo s slike, dopolni sliko in jo zapiši z algebrskim izrazom.



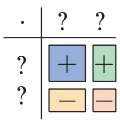
87♦

Razstavi izraz, dan s ploščicami.

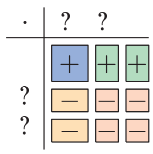
a)



b)



c)



88♦

Dopolni diagram tako, da razstaviš dani izraz.

a)

·	?	?
?	a^2	$-6a$
?	$6a$	-36

b)

·	?	?
?	x^2	$-4x$
?	$4x$	-16

c)

·	?	?
?	$25x^2$	$40x$
?	$-40x$	-64

89♦

Zapiši dani dvočlenik kot zmnožek.

a) x^2-81 **b)** x^2+9
c) $49-a^2$ **č)** $121-c^2$

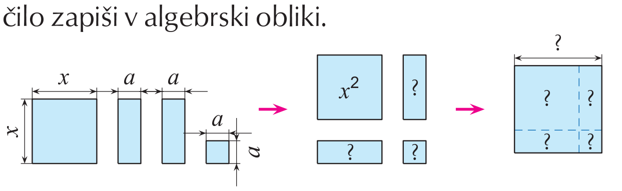
90

Poenostavi zapis zmnožka in mu izračunaj vrednost. Kaj dobiš?

a) $(x+8)(x+8)$ **b)** $(a-11)(a-11)$
c) $(2y+4)(2y+4)$ **č)** $(3a-1)(3a-1)$

91♦

Z vpisi dopolni »geometrijski strip« in njegovo sporočilo zapiši v algebrski obliki.



92

Kvadriraj. Uporabi obrazec.

a) $(x+10)^2$ **b)** $(x-10)^2$ **c)** $(3x-4)^2$

93♦

Če je mogoče, zapiši kot kvadrat enočlenika.

a) $16a^2$ **b)** x^4 **c)** 900
č) $144c^2$ **d)** $36a^{16}$ **e)** $49a^4b^2$
f) 256 **g)** $25a^6b^4$ **h)** $121a^8$

94♦

Dopolni diagram. Zapiši tudi enačbo faktorizacije.

a)

·	?	?
?	a^2	$3a$
?	$3a$	9

b)

·	?	?
?	c^2	$-11c$
?	$-11c$	121

c)

·	?	?
?	$16x^2$	$4xy$
?	$4xy$	y^2

95♦

Razstavi geometrijsko in algebrsko.

a) x^2-4x+4 **b)** x^2-4
c) x^2-2x+1 **č)** x^2+6x+9

96♦

Razstavi dane tričlenike. Uporabi obrazec.

a) $x^2-14x+49$ **b)** $x^2+12x+36$
c) $144+24x+x^2$ **č)** $25-10x+x^2$
d) $9a^2-60a+100$ **e)** $16a^2-40a+25$
f) $49c^2+14ca+a^2$ **g)** $25x^2-80x+64$

97♦ *

Popravi napake.

a) $4+c^2=(2+c)(2-c)$
b) $4a^2-25=(2a-5)(2a-5)$
c) $x^2-8xy-16y^2=(x-4y)^2$
č) $a^2-9b^2=(a-3b)(a+3b)$
d) $x^2-13x+169=(x-13)^2$
e) $49-5a^2=(7+5a)(7-5a)$

98♦

Razcepi tričlenik.

a) x^2-x-2 **b)** x^2-2x-3
c) x^2+x-6 **č)** x^2+3x+2
d) x^2+6x+5 **e)** x^2-6x+5
f) x^2-2x-8 **g)** $x^2-5x-24$
h) $x^2+8x+12$ **i)** $x^2-13x+30$
j) $x^2+7x+12$ **k)** $x^2+4x-60$
l) $x^2+12x+27$ **m)** $x^2-9x-22$

99♦

Izpostavi, če se dá, nato faktoriziraj.

a) $3x^2+12x+9$ **b)** $6x^2-10x-4$
c) $15x^2+21x-18$ **č)** $4x^2-14x+6$
d) $9x^2+21x-30$ **e)** $24x^2+34x-14$

Novi pojmi

- Algebrski izrazi: spremenljivka, koeficient,
- poimenovanje izrazov po številu členov: enočlenik, dvočlenik, veččlenik,
- poimenovanje izrazov po operacijah: vsota, razlika, zmnožek ali produkt, potenca, kvadrat enočlenika, kvadrat dvočlenika, razlika kvadratov . . .

Novi operaciji

- razstavljanje z izpostavljanjem skupnega faktorja ali izraza,
- razstavljanje dvočlenika, tričlenika.

Množenje dvočlenikov

$(x + a)(y + b)$

$\cdot$	y	b
x	xy	xb
a	ay	ab

$\Rightarrow xy + ay + xb + ab$

Dvočlenik pomnožimo z dvočlenikom tako, da vsak člen enega dvočlenika pomnožimo najprej s prvim, nato pa še z drugim členom drugega. Delne zmnožke uredimo in podobne člene seštejemo.

Najpogosteje množimo po *razčlenitvenem zakonu:*

$$(x + a)\cdot(y + b) = x\cdot(y + b) + a\cdot(y + b)$$
$$= xy + xb + ay + ab$$

Zmnožek vsote in razlike

$(a + b)(a - b) \Rightarrow$

$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
b	ab	b^2

$\Rightarrow a^2 - b^2$

Zmnožek vsote $a + b$ *in razlike* $a - b$ je enak *razliki kvadratov* teh enočlenikov.

Navadno množimo po *razčlenitvenem zakonu*:

$$(a + b)(a - b) = a(a - b) + b(a - b)$$
$$= a^2 - ab + ab - b^2$$
$$= a^2 - b^2$$

Kvadrat dvočlenika: vsote in razlike

Kvadrat vsote in razlike

$\cdot$	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$\cdot$	a	$-b$
a	a^2	$-ab$
$-b$	$-ab$	b^2

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2$

$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2$

Množenje enakih dvočlenikov imenujemo *kvadrat dvočlenika*. Če je dvočlenik *vsota*, ga imenujemo *kvadrat vsote*, če je *razlika*, pa *kvadrat razlike*.

Kvadrat dvočlenika je *tričlenik*, ki ga sestavljajo kvadrat prvega člena, dvakratni produkt prvega in drugega člena ter kvadrat drugega člena.

Kvadrat vsote in *kvadrat razlike* se razlikujeta le v predznaku drugega člena.

Razstavljanje z izpostavljanjem skupnega faktorja

$ax + bx = x(a + b)$

$ax + bx + cx - dx =$

$= x(a + b + c - d)$

Dvočlenik, katerega člena imata skupni faktor, lahko preoblikujemo v zmnožek tega faktorja in preostalega dela dvočlenika. Pravimo, da smo ga *razstavili*. Enako velja tudi za veččlenik.

♦ Razstavljanje razlike kvadratov

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

Razliko kvadratov lahko *razstavimo* v zmnožek *vsote* in *razlike*, sestavljenih iz enakih enočlenikov.

♦ Razstavljanje tričlenika

- v kvadrat vsote,
- v kvadrat razlike

$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Tričlenik kvadrata vsote ali *razlike razstavimo* na kvadrat dvočlenika, ki ima za prvi člen koren prvega člena tričlenika, za drugi člen pa koren tretjega člena tričlenika.

♦ Razstavljanje nekaterih tričlenikov

$1x^2 + bx + c =$

$= (1x + \square)(1x + \bigcirc)$

če velja:

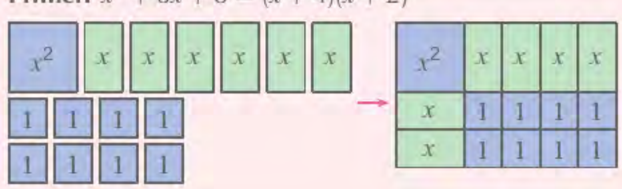
$\square \cdot \bigcirc = c$

$\square + \bigcirc = b$

Kvadratni tričlenik s koeficientom 1 kvadratnega člena $1x^2 + bx + c$ *razstavimo v tak zmnožek dvočlenikov* $(x - \square)(x - \bigcirc)$ *tako, da za koeficienta razcepa* $\square$ *in* $\bigcirc$ *velja:*

1. *člen tričlenika brez spremenljivke je enak zmnožku faktorjev razcepa,*
2. *člen tričlenika drugega člena pa njuni vsoti.*

Primer: $x^2 + 6x + 8 = (x + 4)(x + 2)$



Utrjujemo

100

Zapiši z algebrskim izrazom:

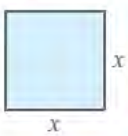
a) kvadrat števila a,
b) razliko kvadratov števil x in y,
c) kvadrat razlike števil x in y,
č) zmnožek števila 5 in razlike kvadratov poljubnih števil x in y. Če se dá, izraz tudi poenostavi.

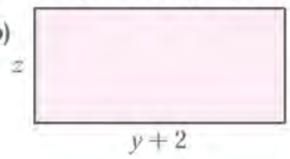
101

Z algebrskim izrazom izrazi skupno dolžino daljic na sliki.

102

Z algebrskima izrazoma zapiši obseg in ploščino lika.

a)


b)


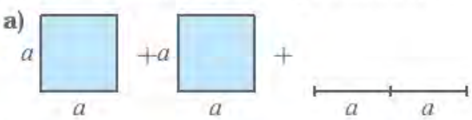
103

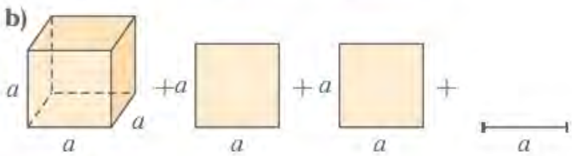
Grafično prikaži dane izraze.

a) $a + b + a + b + a$ **b)** $b + a + a + b$
c) ab **č)** a^2
d) $(a + b)a$ **e)** a^3

104

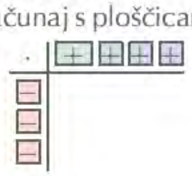
Sporočilo slike zapiši z algebrskim izrazom.

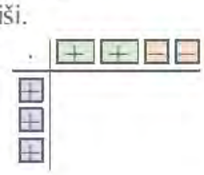
a)


b)


105

Zmnoži enočlenik z dvočlenikom.
Računaj s ploščicami ali jih riši.

a)


b)


106

Uporabi distributivni zakon in zmnoži. Rezultat preveri z uporabo diagrama.

a) $3(2y + 4x)$ **b)** $-3(2x + 3y + 4)$
c) $-a(4b + 3c)$ **č)** $7(3x^2 - 2x - 3)$
d) $4(-2x - 3y)$ **e)** $5(x^2 - 3x + 2)$

107

Iz delčkov, ki ponazarjajo ploščine posameznih delov kvadratnega tričlenika, sestavi kvadrat. Kolikšni sta njegovi stranici?

a)


b)


108

Uporabi diagram in izračunaj zmnožke 93 in 87 ter 76 in 89.

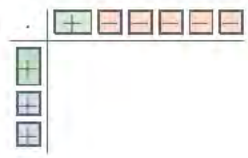
109

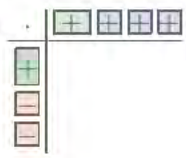
Zmnoži dane dvočlenike. Uporabi diagram.

a) $(x + 7)(x - 8)$ **b)** $(x + 5)(x + 11)$
c) $(x - 4)(x - 12)$ **č)** $(-x - 6)(x - 9)$

110

Zmnoži. Uporabi ploščice, lahko pa tudi rišeš

a)


b)


111

Zmnoži dvočlenike na algebrski način.

a) $(x + 9)(x - 4)$ **b)** $(a + 8)(a - 10)$
c) $(b - 11)(b + 2)$ **č)** $(3a + 1)(3a - 7)$
d) $(4x - 6)(2x + 3)$ **e)** $(6c - 7)(5c + 5)$

112

Izračunaj.

a) $5a(8 - b) + (a - 7)(2b + 3)$
b) $(-2 + 3x)7y - (6x + 3)(4y - 4)$

113♦

Zmnoži. Računaj z diagramom ali algebrsko. Rezultat uredi.

a) $(x^3 - 4x + 9)(x^2 + 4)$
b) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)$
c) $(3x^2 + 2x - 7)(x^2 - 4x - 2)$

114♦

Pomnoži vsak veččlenik z dvočlenikom $a + 1$.

a) $a - 1$
b) $a^2 - a + 1$
c) $a^3 - a^2 + a - 1$
č) $a^4 - a^3 + a^2 - a + 1$
d) Ali znaš napovedati rezultat množenja veččlenika $a^9 - a^8 + a^7 - a^6 + a^5 - a^4 + a^3 - a^2 + a - 1$ z danim dvočlenikom?

115

Dopolni diagram in izpiši ter imenuj rezultat.

a)

$\cdot$	x	5
x		
5		

b)

$\cdot$	x	$-7a$
x		
$-7a$		

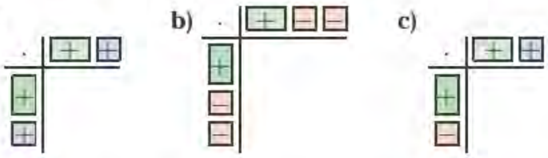
c)

$\cdot$	x	$+9$
x		
-9		

116

Zmnoži s ploščicami ali z risanjem.

a) **b)** **c)**



117

Vpiši ustrezen računski znak.

a) $(x-11)^2 = x^2 \square 22x \square 121$

b) $(x+12)(x-12) = x^2 \square 144$

118

Izračunaj brez računala ali tabel.

a) 52^2, 306^2 **b)** 85^2, 495^2 **c)** 97^2, 777^2

119

Izračunaj z diagramom in na algebrski način.

a) $(2a-1)^2$ **b)** $(3b+6)^2$

c) $(5x+2)(5x-2)$ **č)** $(7y+7)^2$

d) $(4z-2)^2$ **e)** $(4u-6)(4u+6)$

f) $(5v-7)(7+5v)$ **g)** $(10x-20)^2$

120

Kje se skriva napaka?

$7x-5(x-1)^2 = 7x-25x^2+50x+25$

121

Izračunaj. Pazi, v izrazu je ulomek.

a) $(a+\frac{3}{4})^2$ **b)** $(x+\frac{3}{4})(x-\frac{3}{4})$

c) $(\frac{1}{4}x-y)^2$ **č)** $(\frac{3}{5}-\frac{2}{3}a)(\frac{3}{5}+\frac{2}{3}a)$

122

Izračunaj. Pazi na predznake členov.

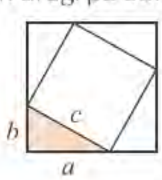
a) $(-2a+3)^2$ **b)** $(-4a-1)^2$

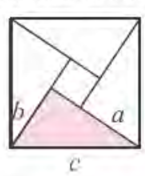
c) $(-7+a)(a+7)$ **č)** $(4-2a)(4-2a)$

d) $(-5c-7d)^2$ **e)** $(-30x+20y)^2$

123

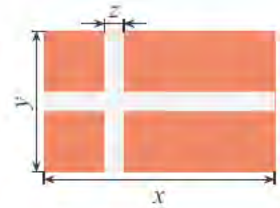
Ob danih slikah pojasni *Pitagorov izrek*. Pri prvi sliki uporabi obrazec za kvadrat vsote dvočlenika, pri drugi pa obrazec za kvadrat razlike dvočlenika.





124

Zapiši v algebrski obliki ploščino rdeče obarvanega dela zastave.



125

Povej s svojimi besedami, kaj dobiš, ko

a) kvadriraš vsoto ali razliko dvočlenika,

b) zmnožiš vsoto in razliko, sestavljeno iz enakih enočlenikov.

126♦

Opiši, kako razstaviš razcepni algebrski izraz.

127

Grafično prikaži razcep dvočlenika $x^2+5x = x(x+5)$. Kako to narediš algebrsko?

128

Zapiši kot zmnožek.

a) $9x+9$ **b)** $7a+a$ **c)** $4c^2+4c$ **č)** $5x-5x^2$

129

Izpostavi skupni faktor.

a) x^3+5x

b) $5(7+a)+(a+7)(a+2)$

c) $(4x+1)(6x+3)-(4x+2)(4x+1)$

č) $(x^2+3x+2)(x+3)^2-(x+3)(x-3)$

130♦

Razstavi v produkt dveh dvočlenikov.

a) x^2-25 **b)** x^2+6x+9

c) $x^2-8x+16$ **č)** x^2-100

131♦

Razcepi, če se da.

a) x^2+25 **b)** x^3-x

c) $7a^2-7b^2$ **č)** $-16a^2+4b^2$

d) $3a^2-12a+12$ **e)** $16x^2y-4y$

f) $3x^2+36x+108$ **g)** $4x^2+8x+4$

132♦

Razstavi na algebrski način.

a) x^2+5x+6 **b)** x^2-2x-8

c) x^2+6x+8 **č)** x^2+5x+4

d) $x^2+7x-14$ **e)** $x^2-5x-14$

f) $x^2+2x-15$ **g)** x^2-x-72

h) $2x^2-7x+3$ **i)** $3x^2+7x-10$

j) $3x^2-5x-2$ **k)** $5x^2+7x-6$

1.
Zmnoži.

a) $5 \cdot a \cdot b$ **b)** $3 \cdot a \cdot a$
c) $2(4a + 3b)$ **č)** $(3x - 2y)4$

2.
Zmnoži. Imenuj posamezne račune.

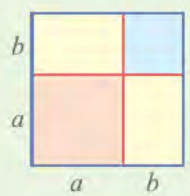
$\cdot$	x	11
x		
2		

$\cdot$	x	-7
x		
7		

$\cdot$	x	-8
x		
-8		

3.
Ploščino kvadrata s slike zapiši

a) kot kvadrat dolžine stranice,
b) z vsoto delnih ploščin.
Pojasni pomen obeh zapisov.



4.
Izračunaj z uporabo obrazcev.

a) $(y - 4)^2$
b) $(2a + 8)^2$
c) $(x + 3a)(x - 3a)$

5.

a) Razstavi enočlenika 210 in $6x^3$ na vse mogoče pozitivne faktorje.
b) Enočlenik $121x^4$ zapiši kot potenco.

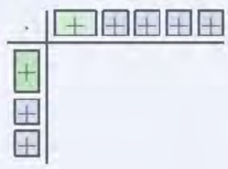
6.
Zapiši dani izraz kot zmnožek.

a) $3x^2 + 15x$
b) ◆$(x - 4y)^2$
c) ◆$(a + 3)^2$

1.
Zmnoži z diagramom.

a) $86 \cdot 97$
b) $(x - 7)(x + 8)$
c) $(2x + 9)(3y - 5)$
č) $(x + 12)(x - 12)$
d) $(2x - 5)(2x - 5)$

2.
Zmnoži na geometrijski način.



3.
Če je mogoče, zapiši izraz kot enočlenik.

a) $4a + 9a$ **b)** $x^2 + x^4$
c) $13x \cdot (-x)$ **č)** $8x \cdot (-4x)$
d) $3(a - 2) + 2(a - 2) - 7(a - 2)$

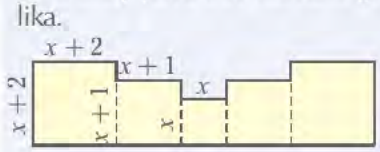
4.
Zmnoži. Uporabi zakon o razčlenjevanju, če se dá, pa tudi obrazec.

a) $(9x - 3y)(2x - 4y)$
b) $(11x - 2x^2)(11x + 2x^2)$
c) $(4a - 3y)(4a - 3y)$
č) $(-2x - 7y)(2x - 7y)$
d) $(2x^2 - 3y)^2$

5◆.
Zapiši manjkajoči člen v tričleniku tako, da bo ta razcepen.

a) $x^2 + \square + 25y^2$
b) $x^2 + \square + 16y^2$
c) $4x^2 - 32xy + \square$
č) $x^2 - \square + 49y^2$

6.
Izračunaj ploščino narisanega lika.

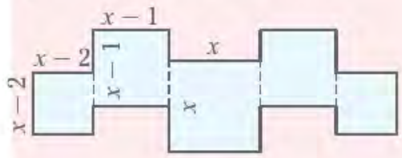


7◆.
Faktoriziraj.

a) $x^2 + 14x + 49$
b) $4a^2 - b^2$
c) $4x^2 - 12x + 9$

1.
Poljuben pravokotnik z dolžino x in širino y grafično preoblikuj v pravokotnik s stranicama $x + 3$ in $y + 2$. Izračunaj ploščino novega pravokotnika.

2.
Zapiši ploščino lika s slike z urejenim algebrskim izrazom.



3.
Poenostavi izraze.

a) $(a + 2)^2 - (a + 2)(a - 2) + 2(a + 2)$
b) $(4x + 1)(4x - 1) + (4x + 1)^2$
c) $(x - 6)^2 - (x + 3)^2$

4.
Zmnoži. Uporabi obrazce.

a) $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{4}b)(4a - 2b)$
b) $(-6a - 7b)^2$
c) $(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y)(\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}y)$

5.
Z izpostavljanjem razstavi veččlenik v zmnožek dveh faktorjev.

a) $16x^2yz - 24xy^2z^2 + 4xyz$
b) $-3x(x - 3) - (x - 3)(-2x) + (2x - 1)(x - 3)$
c) $-\frac{7}{8}a^2b + \frac{14}{24}ab - (-\frac{7}{16}ab^2)$
č) $a^4 - a^3 + a^2 - a$

6◆.
Zapiši manjkajoči člen v tričleniku tako, da bo ta razcepen.

a) $x^2 - 7x + \square$

7◆.
Razstavi dane izraze v zmnožke ali kvadrate.

a) $x^2 - 5x + 4$
b) $x^2 + 11x - 60$
c) $x^2 - 17x + 60$
č) $x^2 + 3xy + 2y^2$

Milena Strnad

STIČIŠČE 9

Matematični učbenik za 9. razred osnovne šole

REŠITVE NALOG

ZALOŽNIŠTVO JUTRO

Viš. pred. mag. Milena Strnad

STIČIŠČE 9

Matematični učbenik za 9. razred osnovne šole

REŠITVE NALOG

Priloga k učbeniku

Preračun nalog in korekture:
Alen Divjak, prof., Milena Štuklek, predmetna učiteljica

Jezikovni pregled:
Danijela Čibej, prof.

Tehniške risbe:
Martin Zemljič, dr. Matjaž Željko

Oblikovanje in prelom:
Martin Zemljič

Oprema:
ONZ Jutro (ilustracija Ciril Horjak)

Strokovni svet Republike Slovenije za splošno izobraževanje je na 171. seji dne 18. 6. 2015 s sklepom št. 613-2/2015/75 potrdil knjigo »STIČIŠČE 9, Matematični učbenik za 9. osnovne šole« kot učbenik za pouk matematike v 9. razredu osnovnošolskega izobraževanja.

ISBN 978-961-6746-88-5

NAROČILA:

JUTRO d.o.o., Črnuška c. 3, p.p. 4986, 1001 Ljubljana
Tel. (01) 561-72-30, 051 667-488, 041 698-788
Faks (01) 561-72-35
E-pošta: Info@jutro.si • www.jutro.si

Kazalo

Čeprav je proučevanje nekaterih ved včasih sprožilo tudi pripombe, češ da so nepomembne in ne gre znjimi izgubljati časa, sem prepričan, da za študij matematike nikomur ni bilo žal; kvečjemu, da se ga je lotil premalo temeljito.
B. Franklin

Tudi pri reševanju poljubne naloge gre za drobec odkritja. Če ti naloga, čeprav preprosta, izzove radovednost in te prisili, da si iznajdljiv, in če jo rešuješ z lastnimi močmi, lahko občutiš napetost razuma, ki pelje k odkritju in te napolni z radostjo zmage. Taki občutki ti lahko zbudijo tek po umskem delu in ti za vse življenje pustijo odtis na razumu in značaju.
G. Polya

Draga devetošolka, dragi devetošolec,

k učenju matematike sodi tudi reševanje nalog in preverjanje rešitev. Rešitve nalog ti ponuja ta knjižica. Pravilna rešitev naj te razveseli in spodbudi k nadaljnjemu delu, nepravilna pa usmeri k temu, da se naloge lotiš ponovno. Šele, če drugič ne uspeš, primerjaj svoje reševanje s prijateljevim. Če tudi to ne pomaga, prosi za pomoč učiteljico ali učitelja, nikakor pa ne obupaj.

Rešitev ne prepisuj ali prerisuj, saj boš tako prikrajšan za občutek radosti, hkrati pa ne boš preveril/-a lastnega znanja, sposobnosti in vztrajnosti.

Upoštevaj, da z iskanjem rešitve ne preverjaš in ne utrjuješ samo svojega matematičnega znanja, ampak prispevaš tudi k razvoju svojega mišljenja.

Nalog v učbeniku je dovolj celo za najbolj vedoželjnje. Razdeljene so v tri skupine. Najprej se loti najpreprostejših (zelenih), nadaljuj z zahtevnejšimi (modrimi), kdaj se spoprimi tudi z najzahtevnejšimi (rdečimi).
Upoštevaj, da

- je zahtevnost naloge stvar osebne presoje, zato bi ti morda naloge prerazporedil/-a drugače.
- Vsakdo lahko z voljo in vztrajnostjo reši vsako nalogo iz *Stičišča 9*.
- Raje reši malo nalog s premislekom kot pa veliko nalog, ki bi jih reševal/-a po raznih receptih. Reši le toliko nalog, kot ti jih svetuje učiteljica ali učitelj, dodatno rešuj le, če ti je to v veselje. Ne misli, da moraš rešiti vse naloge iz učbenika.

Učbenik raje pogosto beri. Prebiraj posebej tisto, kar piše v okvirčkih z rumeno podlago in povzetke vsebine *Vem in znam* iz poglavij.

Če te matematika posebej veseli, se loti tudi snovi, ki je označena z ♦ in pomeni izbirno vsebino, in snovi, označene z ▭, tudi če je v šoli ne obravnavate.

Pri učenju matematike ti želim veliko uspeha in zadovoljstva!

Milena Strnad

U. Anketa v empirični preiskavi. Modeliranje

P. Obdelava podatkov

1

Opisni: simpatično dekle, vesel fant, rumen šal, vijolični šal, telefonski številki: 040 234 222, 050 756 354.
Številski zvezni: 1,72 m (visoka manekenka), 125 kg (sladkorja), 540 kg (moke), 15,7 km (poti), dolžina $15\sqrt{2}$ m, 4 m (zelenega blaga).
Številski diskretni: 7 (jabolk), 13 (hrušk), 2,7 10^3 (prebivalcev).

2

a) Individualno delo. Npr.:
Opisni: rdeče, sivo, moški, ženske, telefonska številka 041 222 523 ipd.
Številski: 134 m, 23, 12,46

b) *Nezvezni številski podatek* lahko zavzame samo eno od vrednosti, ki je dopustna v danem primeru. Izrazimo jo z naravnim številom.
Zvezni številski podatek lahko zavzame katero koli vrednost med dvema določenima številoma. Izrazimo ga z realnim številom.

c) *Kodiranje* pomeni skrajšanje zapisov podatkov s *kodo*, npr. moškega označimo z 0, žensko z 1.

Čiščenje podatkov pomeni izločanje nepopolnih podatkov.

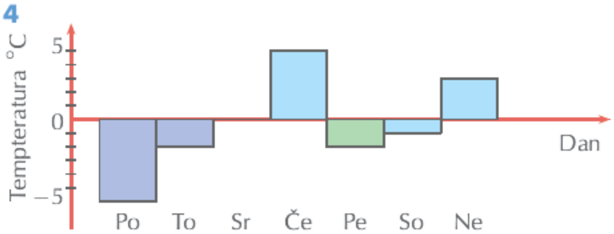
3

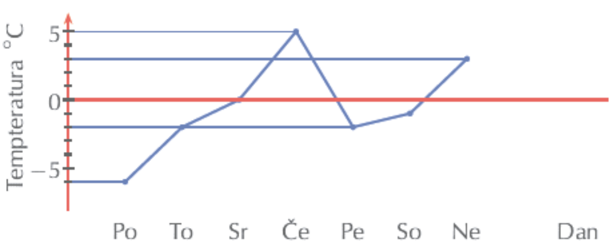
Kodiranje je individualno delo, ker ni predpisano, npr.:

D – direktor
PD – pomočnik direktorja
E – ekonomist
P – pravnik
t – tajnica
de – delavec

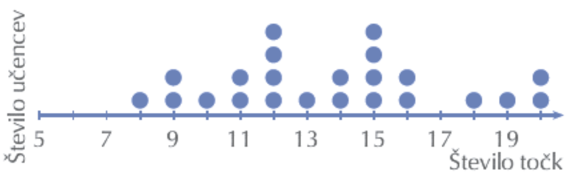
Poklic	Frekvenca
D	1
PD	2
E	3
P	2
t	3
de	150

4





5



6

a) 20, 14, 8, 19, 12
b) 24, 35, 3, 56, 33, 27, 19, 22

7

8

a) Vsaka figura ustreza 220 drevesom.

b) Risanje je individualno delo.
2 640 dreves bi pokazal piktogram:
z 2 drevesoma z legendo 1 drevo pomeni 1 320 dreves,
s 4 drevesi z legendo 1 drevo pomeni 660 dreves,
z 8 drevesi z legendo 1 drevo pomeni 330 dreves,
z 12 celimi drevesi z legendo 1 drevo pomeni 220 dreves,
s 16 drevesi z legendo 1 drevo pomeni 165 dreves itd.

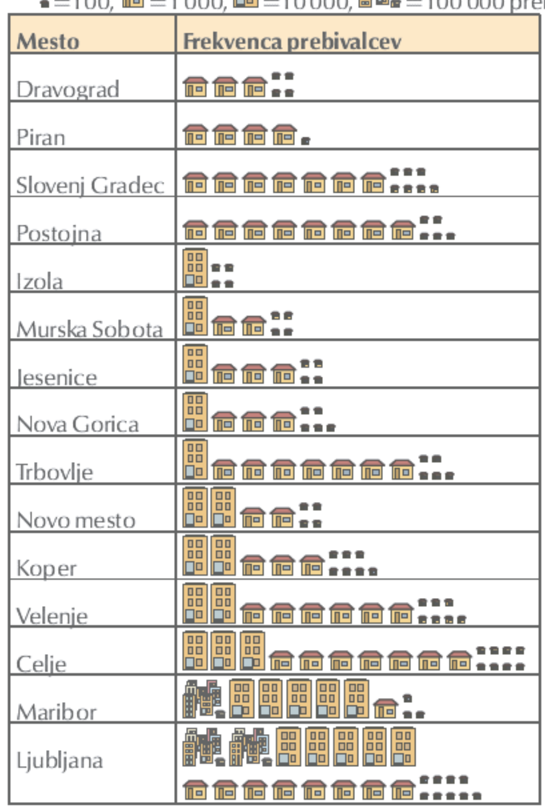
9

a) Celje, Dravograd, Izola, Jesenice, Koper, Ljubljana, Maribor, Murska Sobota, Nova Gorica, Novo mesto, Piran, Postojna, Slovenj Gradec, Trbovlje, Velenje.

b)

Mesto	Fr. prebivalcev
Dravograd	3 400
Piran	4 100
Slovenj Gradec	7 700
Postojna	8 500
Izola	10 400
Murska Sobota	12 400
Jesenice	13 400
Nova Gorica	13 500
Trbovlje	17 500
Novo mesto	22 400
Koper	23 700
Velenje	26 700
Celje	37 800
Maribor	151 300
Ljubljana	258 900

c) Legenda:



10

a) Pametni telefon enako pogosto uporabljajo za telefoniranje in za pošiljanje SMS.

b) Po 30 jih telefonira in po 30 jih pošilja SMS. Po 15 jih fotografira in prav toliko jih igra igrice. Po 10 jih snema kratke filme ali uporablja internet ali uporablja telefon kot računalnik.

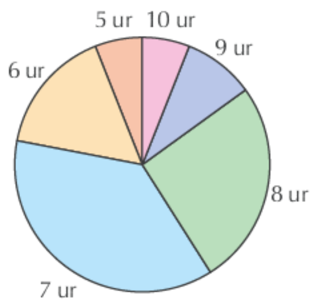
c) Dnevno posname po 1 fotografijo 7 oseb, po 2 fotografiji 5 oseb, po 3 fotografije 3 osebe, po 4 fotografije le eden, po 5 fotografij pa kar pet oseb.

11

Opomba: Pred risanjem najprej izračunamo ustrezne velikosti središčnih kotov, ki pripadajo posameznim krožnim izsekom. Kote rišemo s kotomerom.
Preprosteje je, če podatke napišemo v elektronsko preglednico in nam potem čarovnik sam nariše ustrezni tortni diagram.

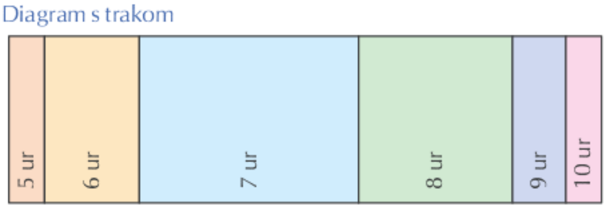
Diagram s krogom

26 % od 360° = 0,26 $\cdot$ 360 ≈ 94° (8 ur)
37 % od 360° = 0,37 $\cdot$ 360 ≈ 133° (7 ur)
16 % od 360° = 0,16 $\cdot$ 360 ≈ 58° (6 ur)
9 % od 360° = 0,09 $\cdot$ 360 ≈ 32° (9 ur)
6 % od 360° = 0,06 $\cdot$ 360 ≈ 21° (5 ur, 10 ur)



Delež odraslih glede na dolžino spanja

Diagram s trakom

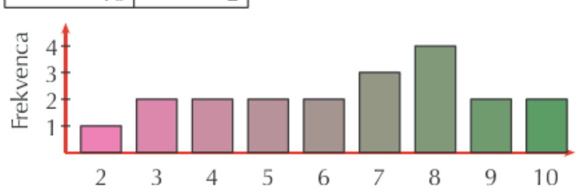


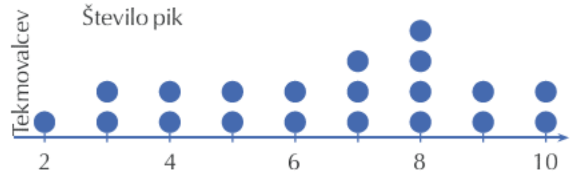
12

a) V kvizu je sodelovalo 20 udeležencev.

Razporeditev v preglednico

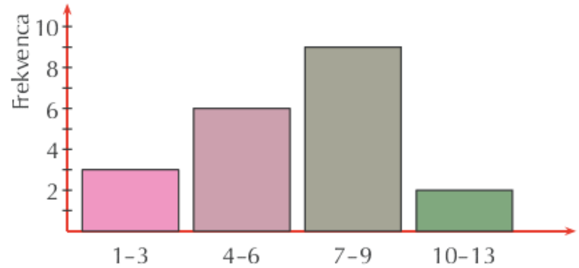
Število točk	Frekvenca
2	1
3	2
4	2
5	2
6	2
7	3
8	4
9	2
10	2





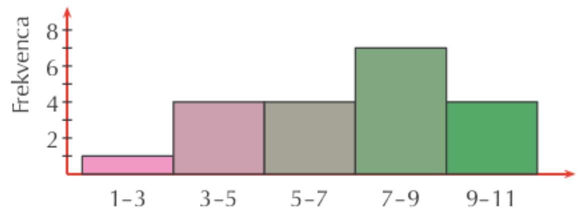
b) Razporeditev v preglednico

Razred točk	Frekvenca
1–3	3
4–6	6
7–9	9
10–13	2



c) Razporeditev v preglednico

Razred točk	Frekvenca
1–3	1
3–5	4
5–7	4
7–9	7
9–11	4



č) Podatki v urejenem nizu so manj pregledni kot podatki, razvrščenimi v razrede, zlasti če jih je veliko. Frekvenčna preglednica z razredi podatke zgosti. Pregled nad celoto je boljši, podrobnosti pa se izgubijo.

d) Odgovor je individualno delo.

P. Preiskave

13

Odgovor je individualno delo, npr.:
Pomembno je, da

- problem razumemo in da ga znamo izraziti v matematičnem jeziku s simboli,
- znamo natančno in pozorno opazovati modele, pojave, preizkuse,
- obvladamo temo, s katero je problem povezan,
- obvladamo osnove logičnega sklepanja.

Ko prepoznamo problem, se lotimo njegovega reševanja in ga rešimo.

14

a) *Matematična preiskava.* Pri njej raziskujemo probleme, pri katerih si vprašanja zastavimo sami. Pravimo tudi, da pri njih rešujemo matematične *izzive*, to je naloge odprtega tipa. Pri izvajanju matematičnih preiskav se urimo v razmišljanju, v postavljanju ustnih in pisnih vprašanj, preverjanju napovedi, v sporočanju ugotovitev.

b) *Empirična preiskava.* Pri izvedbi je najpomembneje, da obvladamo tehnike *zbiranja*, *urejanja*, *prikazovanja podatkov* in *interpretacijo rezultatov*.

Navedba empirične preiskave je individualno delo, npr. raziskovanje, katera knjiga je najbolj brana, kateri film je najbolj gledan, katera pesem je najbolj poslušana v izbranem mesecu med devetošolci itd.

15

Odgovor je individualno delo. Na primer:
Pri matematičnih preiskavah si sami zastavljamo vprašanja. Pri empiričnih preiskavah obdelujemo navadno že zbrane podatke. Lahko pa podatke zberemo tudi sami z merjenjem, štetjem, anketiranjem.

16

Individualno delo. Primer možnega vprašanja:
Namig: Ali obarvane kroge vzorca lahko premestimo tako, da se vse take kroglice združijo v vrstico ipd.?

17

Individualno delo.
Posebnost tega razreza trikotnika je, da pri preoblikovanju
- dobimo iz trikotnika ploščinsko enak kvadrat,
- delov trikotnika ni treba popolnoma razrezati, da bi z njimi sestavili ploščinsko enak kvadrat.

18

Individualno delo.
Namig: Podatke lahko zberemo z interneta ali iz knjig in člankov na to temo. Poleg sestave obrokov ne pozabimo na njihovo število, razporeditev prek dneva. Velja raziskati tudi vpliv gibanja na prehrano.

19

Individualno delo.

1. Uporaba ankete v empirični preiskavi

Uvodna

Individualno delo. Na primer, takole:

VPRAŠALNIK

Navodila Ustrezni odgovor vpiši (. . . . .), obkroži eno izmed dveh možnosti ali izberi med (a), (b), (c).

1. Spol M, Ž
2. Razred:
3. Ali te matematika zanima? Da Ne
4. Ali si zadovoljen/-a s svojo oceno matematike? Da Ne
5. Ali bi lahko pri matematiki dosegel/-a boljšo oceno? Da Ne
6. Ali pri učenju matematike uporabljaš:
   - učbenik, Da Ne
   - svoje šolske zapiske, Da Ne
   - šolske zapiske sošolke/sošolca, Da Ne
   - slikovno gradivo za preglednejše zapiske, Da Ne
   - e-gradiva, Da Ne
   - internet, Da Ne
   - drugo? . . . .
7. Kako pogosto uporabljaš učbenik?
   (a) pogosto (b) redko (c) nikoli
8. Učbenik uporabljaš:
   - za branje razlage, Da Ne
   - za branje povzetkov, Da Ne
   - za reševanje nalog, Da Ne
   - izključno samo za reševanje nalog, Da Ne
   - za samopreverjanje znanja Da Ne

   drugo. . . . .
9. Ali razlago v učbeniku razumeš? Da Ne
10. Ali ti pri učenju pomaga, da so naloge razdeljene na različne težavnostne stopnje? Da Ne
11. Kakšna se ti zdi težavnost nalog v učbeniku?
    (a) ustrezna (b) prelahka (c) pretežka
12. Ali je v učbeniku dovolj rešenih primerov? Da Ne
13. Kdaj se učiš matematiko?
    - vsak dan, Da Ne
    - ko rešujem domače naloge, Da Ne
    - po potrebi, Da Ne
    - dan pred preverjanjem znanja, Da Ne
    - nekaj dni pred preverjanjem znanja, Da Ne
    - pred tekmovanji, Da Ne
    - drugo. . . . .

Hvala za sodelovanje

20

Individualno delo.

21

Individualno delo.

22

Individualno delo.

23

Individualno delo.

24

Individualno delo.

25

Individualno delo.

26

Individualno delo.

27

Individualno delo.

28

Individualno delo.

29

Individualno delo.

2. Modeliranje

Uvodna

Individualno delo. Na primer:
Besedilne naloge podajajo konkreten problem. Rešujemo jih lahko takole:
1. z razumevanjem preberemo besedilo,
2. izpišemo podatke,
3. naredimo načrt in ga izvedemo,
4. napišemo odgovor in pred tem preverimo pravilnost rešitve.

Modelirati pomeni, da predmete ali situacije opišemo z matematičnimi pojmi in odnosi med njimi. Npr. žogo lahko nadomestim s kroglo; odnos med časom in številom delavcev pri urejanju vrta z obratnim sorazmerjem, odnos med številom vstopnic in zneski za plačilo prikažemo s premim sorazmerjem idr.

30

Individualno delo, npr.:
- pomaranča: krogla
- žoga: krogla
- omara: kvader
- embalaža za mleko: kvader
- telefonska žica: valj

31

- valj: cev, žica
- krogla: pomaranča, žoga, milni mehurček
- piramida: Egipčanska piramida
- stožec: cestni stožec

32

a) Premo sorazmerje
b) Obratno sorazmerje

33

Namig: Razmisli, ali so izbrani kriteriji (velikost zaslona, zmogljivost procesorja, različne možnosti uporabe) vsi enako pomembni. Opazuj velikost faktorjev pri spremenljivkah z, p in u ter primerjaj modela.

3. Primeri modeliranja realističnih situacij

Uvodna

Modeliranje je proces. Za oblikovanje modela se je treba najprej dogovoriti, katere kriterije bomo upoštevali, npr.: dosežki športnika, udeležba na šolskih tekmovanjih, število športov, kako dolgo se učenec že ukvarja s športom. Izbrati je treba spremenljivke ter se dogovoriti, kako bomo vrednotili posamezne spremenljivke. Oblikujemo predlog modela, o njem ponovno razmislimo, ga po potrebi dopolnimo. Na koncu premislimo tudi, ali je model primeren, uporaben v tej in podobnih situacijah.

34

Individualno delo.

Namig. Izberi *kriterije* in določi *spremenljivke* v skladu s predlogi učencev 9. b. Določi *ocenjevalni sistem*. Izdelaj *model*.

35

Individualno delo.

Namig. Razmisli, kateri kriteriji določajo izvirni izdelek. Določi spremenljivke v sladu z izbiro kriterijev. Določi ocenjevalni sistem.

36

Namig. Razmisli, kateri kriteriji so pomembnejši pri presoji kakovosti koles, in presodi, kateri od obeh modelov jih bolj upošteva.

37

Individualno delo.

Namig. Izdelaj *kriterije*, določi *spremenljivke*, postavi *ocenjevalni sistem*, *oblikuj model*.

38

a) Popotovanje po Evropi
b) Npr. $t = z + p + 3k$
c) Individualno delo

4. Modeliranje realističnih situacij z empiričnimi podatki

Uvodna

Napovedovanje temelji na izkušnjah, zbranih podatkih, na podlagi opazovanja (npr. na podlagi opazovanju prometa napovemo gostoto prometa) idr. Uporablja se pri vremenskih napovedih, v astronomiji, statistiki, v medicini (npr. ob spremljanju bolnikov, zbiranju podatkov, lahko napovemo začetek pojava neke bolezni).

39

Namig. Razmisli, katere podatke bi bilo najbolj smiselno zbrati (npr. cene mobilnih telefonov; povpraševanje po mobilnih telefonih znamke SAMX, zadovoljstvo potrošnikov mobilnih telefonov znamke SAMX). Določi kriterije in oblikuj model.

40

Namig: Razmisli, katere podatke zbrati. Analiziraj zbrane podatke: opazuj gibanje cen pri različno velikih stanovanjih, ali opaziš vzorec v gibanju cen idr. Določi kriterije in oblikuj model.

I. Algebrski izrazi

P. Spremenljivke, vzorci. Algebrski izrazi.

Spremenljivke v izrazih, v zaporedjih

1

a) Črko, ki lahko predstavlja katero koli število in jo zaznamujemo s katero koli črko abecede, imenujemo *spremenljivka*.
b) Neznano število frnikol po dogovoru označimo s poljubno črko s konca abecede x, y ali z. Pravimo:
V vreči je x frnikol. Ko jim dodamo še dve frnikoli, je *v vreči $x + 2$ frnikol.* Zapis pogovorno imenujemo *izraz s črko* ali matematično-*algebrski izraz.*

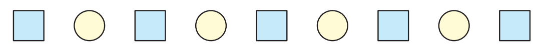
2

Matematični zapisi trditev so:
a) $(x + 2) : 3 - 3\ \ x$; *algebrski izraz.*
b) $7\ \ 2a = 14a$, *enakost* danega in poenostavljenega izraza.

3

Zaporedje opiši po svoje. Navedene zapise smatraj za možne.

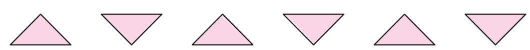
a)



Opišemo.
Zaporedje je sestavljeno iz dveh likov, *kvadrata* in *kroga*, ki se zaporedno ponavljata.
Kvadrat predstavlja 1. člen zaporedja, *krog* pa 2. člen zaporedja. Iz tega sledi, da stojijo kvadrati na lihem mestu, krogi pa na sodem zaporednem mestu.

10. mesto: krog,
41. mesto: kvadrat,
n-to mesto: če je mesto sodo, $2n$; $n \in \mathbb{N}$, stojijo na njem krogi, če je mesto liho, $2n - 1$; $n \in \mathbb{N}$, stojijo na njem kvadrati.

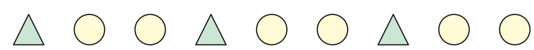
b)



Opišemo.
Zaporedje je sestavljeno iz dveh različnih leg trikotnikov, ki se izmenično ponavljata.

Vzemimo prvi trikotnik za osnovni trikotnik Potem velja:
55. mesto: trikotnik
120. mesto: vrtež trikotnika za $\frac{1}{2}$; trikotnik, zavrten za 180°.
n-to mesto: če je mesto sodo $2n$: $n \in \mathbb{N}$ stojijo na njem zavrteni trikotniki, če je mesto liho, $2n - 1$; $n \in \mathbb{N}$, stojijo na njem trikotniki v prvotni legi.

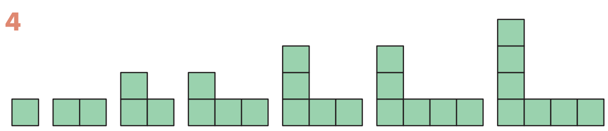
c)



Opišemo.
Zaporedje je sestavljeno iz kroga in dveh skladnih, enako obarvanih trikotnikov. Vsi trije liki si zaporedno sledijo v enakem vrstnem redu. *Krog* predstavlja 1. člen, 2. člen predstavlja *prvi trikotnik* in 3. člen *drugi trikotnik*. Vidimo, da obe obliki lahko zavzameta tako sodo kot liho mesto. S slike pa vidimo tudi, da krogi stojijo na mestu, ki sledi večkratniku števila 3.

113. mesto: trikotnik,
289. mesto: krog,
n-to mesto: če stoji lik na mestu $3n + 1$, je to krog, sicer je trikotnik.

4



a) Ker na 1. mestu zaporedja stoji 1 kvadratek, na 2. mestu 2 kvadratka, na 3. mestu 3 kvadratki itd., vidimo, da prikazano

6

Dani trije ulomki so določeni, če za spremenljivko izberemo katero koli racionalno število, ker omejitev pri izbiri vrednosti za spremenljivko x ni. Vrednost izrazov v imenovalcih vseh treh ulomkov je vedno različna od nič, še več, je vedno pozitivna. To je posledica tega, da spremenljivka v imenovalcu nastopa vedno v sodi potenci, druga operacija pa je prištevanje pozitivnih števil.

7

Ulomek ni določen za tiste vrednosti spremenljivke, za katere je imenovalec ulomka enak 0. Torej so:

a) $x \neq 0$ in $x \neq 6$ **b)** $x \neq 0$ in $x \neq -7$
c) $x \neq 9$ in $x \neq -9$ **č)** $x \neq \frac{1}{2}$ in $x \neq -3$

8

a) $\frac{1}{7x(x-2)}$ $x \neq 0,\ x \neq 2$
b) $\frac{1}{(x+1)(x-1)}$ $x \neq -1,\ x \neq 1$
c) $\frac{3x}{(x-3)^2}$ $x \neq 3$
č) $\frac{2}{3{,}5x(2x-1)}$ $x \neq 0,\ x \neq \frac{1}{2}$
d) $\frac{6}{x(x+1)}$ $x \neq 0,\ x \neq -1$
e) $\frac{3x-4}{6x(1+2x)}$ $x \neq 0,\ x \neq -\frac{1}{2}$

9

a) $\frac{1}{x-8}$ **b)** $\frac{1}{x+7}$
c) $\frac{1}{x(x-11)}$ **č)** $\frac{4}{x(x+4)(x+5{,}3)}$

10

a) $\frac{1}{x}$ **b)** $\frac{1}{3x}$ **c)** $\frac{1}{4x}$
č) $\frac{1}{x^2}$ **d)** $\frac{x+1}{x^2}$ **e)** $\frac{x-1}{x^2}$

11

a) $\frac{5}{5a}$; za $a \neq 0$
b) $\frac{6a}{3a^2}$; za $a \neq 0$
c) $\frac{20b}{16b^2}$; za $b \neq 0$
č) $\frac{a^2}{2a-a^2}$; za $a \neq 2$, za $a \neq 0$,
d) $\frac{-4c^2-c}{-2c^2+c}$; za $c \neq 0$, za $c \neq \frac{1}{2}$
e) $\frac{-3a+3a^2}{-3a^2-3a}$; za $a \neq 0$, za $a \neq -1$

12

a) $\frac{8}{9}$; $\frac{1}{x^2}$; $-\frac{x}{5}$; $\frac{1}{-5}$; $2x$; $\frac{x-1}{x}$
b) $\frac{1}{2}$; $\frac{x}{4}$; $-\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$; $\frac{x}{x-1}$; $\frac{x-2}{3x^2}$
c) $\frac{5}{6}$; $\frac{1}{7x}$; $\frac{2x}{3x^3}$; $\frac{3}{8x}$; $\frac{9}{x^5}$

13

a) $\frac{3x}{10}$ **b)** $\frac{b}{a}$ **c)** $\frac{x-2}{3}$
č) $\frac{1}{x^2}$ **d)** $\frac{a}{a-1}$ **e)** $\frac{x^4}{x-4}$

V danih primerih se s krajšanjem določenost ulomkov ne spremeni.

14

Ulomki so razširjeni z naslednjimi izrazi:

a) 3 **b)** $2x$ **c)** x
č) $5x$ **d)** -3 **e)** x^2

15

a) $2x$ **b)** $21a$ **c)** $5a$
č) $14x$ **d)** $12x$ **e)** $-5a$

16

a) $20a$ **b)** $8y^2; y \neq 0$
c) 5 **č)** $25x; x \neq -1$
d) $3x; x \neq 0$ **e)** $x^2 - 7x; x \neq 0$ in $x \neq 7$
f) $4x - 8; x \neq 2$ **g)** $x - 5; x \neq 5$ in $x \neq -5$

17

a) $\frac{4x}{12x^2}$; $\frac{15x^2}{12x^2}$; $\frac{6}{12x^2}$; $\frac{6x^3}{12x^2}$
b) $\frac{24x}{84x^2}$; $\frac{-4x^3}{84x^2}$; $\frac{3x}{84x^2}$; $\frac{-18x^3}{84x^2}$
c) $\frac{24x}{60x^2}$; $\frac{15x}{60x^2}$; $\frac{12x^2}{60x^2}$; $-\frac{6x^2}{60x^2}$

18

a) $\frac{1}{3}$ za $x \neq 5$ **b)** $\frac{3}{x}$ za $x \neq 0$ in $x \neq -3$
c) $\frac{1}{5}$ za $x \neq -7$ **č)** $\frac{x}{3}$ za $x \neq 0,\ x \neq 4$
d) $8(x+1)$ za $x \neq -1$ **e)** $\frac{3}{x-9}$ za $a \neq 9$

19

a) $\frac{5x+10}{4x+8} = \frac{5(x+2)}{4(x+2)} = \frac{5}{4}$ za $x \neq -2$
b) $\frac{4}{2x-1}$ za $x \neq \frac{1}{2}$ **c)** $3 - 4x$
č) $\frac{5x}{3}$ za $x \neq -3$ **d)** 2 za $x \neq -7$
e) x za x $\neq 0$ in x $\neq -1$ **f)** 6 za $x \neq -1$
g) $\frac{2}{3}$ za $x \neq -\frac{1}{2}$

20

Prvi ulomek sta oba krajšala narobe. Prezrla sta, da se ulomek ne da krajšati, ker je v števcu *vsota*. Pri krajšanju bi zato morala deliti oba *seštevanca*.

Pravilno.

$\frac{x+8}{x} = \frac{1+\frac{8}{x}}{1}$ za $x \neq 0$

Tudi drugi ulomek sta oba krajšala narobe. Prezrla sta, da je v imenovalcu *razlika*, zato bi pri krajšanju z x morala deliti tako minuend kot subtrahend.

Pravilno.

$\frac{6x}{9-3x} = \frac{6x}{3(3-x)} = \frac{2x}{3-x}$ za $x \neq 0$ in $x \neq 3$

Tudi tretji ulomek sta oba krajšala narobe. Prezrla sta, da je v števcu produkt, ki bi ga morala krajšati tako, da bi krajšala samo en faktor v števcu.

Pravilno.

$\frac{8x \quad 2x}{2x} = \frac{4 \quad 2x}{1} = 8x$

Tudi zadnji ulomek sta oba krajšala narobe. Prezrla sta, da se tega ulomka ne da krajšati.

21

a) $\frac{x-3}{3-x} = \frac{(-1)(-x+3)}{3-x} = \frac{(-1)(3-x)}{3-x} = -1$ za $x \neq 3$
b) -1 za $x \neq 7$ **c)** -1 za $x \neq -1$
č) -1 za $a \neq -2$ **d)** $-c$ za $c \neq \frac{1}{8}$
e) $-\frac{5}{4}y$ za $y \neq \frac{2}{3}$

22

a) $1 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ **b)** $5 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
c) $-1 \in \mathbb{Z}$ **č)** $-1 \in \mathbb{Z}$
d) $2 \in \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ **e)** $-3 \in \mathbb{Z}$

23

a) $\frac{a-1}{(a-1) \quad (a-1)} = \frac{1}{a-1}$ za $a \neq 1$
b) $\frac{1}{b+1}$ za $b \neq -1$ **c)** $\frac{1}{x-1}$ za $x \neq 1$
č) $a - 4$ za $a \neq 4$ **d)** $x + 8$ za $x \neq 8$
e) $\frac{1}{3x+1}$ za $x \neq -\frac{1}{3}$; in $x \neq \frac{1}{3}$
f) $\frac{4x+3}{4x-3}$ za $x \neq \frac{3}{4}$ **g)** $\frac{4x-2}{4x+2}$ za $x \neq \frac{1}{2}$ za $x \neq -\frac{1}{2}$

24

a) $\frac{5\ (x+1)}{(x+1)\ (x+1)} = \frac{5}{x+1}$ za $x \neq -1$

b) $\frac{x-3}{x+3}$ za $x \neq -3$ in $x \neq 3$

c) $\frac{3x+2}{2x}$ za $x \neq -\frac{2}{3}$ in $x \neq 0$

č) $\frac{3x}{2x+5}$ za $x \neq -\frac{5}{2}$

d) $\frac{2}{3x+14}$ za $x \neq -\frac{14}{3}$

e) $\frac{(x-6)(x+6)}{(x+1)(x+6)} = \frac{x-6}{x+1}$ za $x \neq -1$ in $x \neq -6$

f) $\frac{x-1}{3x}$ za $x \neq -5$ in $x \neq 0$

g) $\frac{x-4}{2x+6}$ za $x \neq 3$ in $x \neq -3$

2. ♦ Računanje z algebrskimi ulomki

Uvodna

Individualen odgovor. Morda v smislu, da je Uršina posredna tolažba umestna. Verjetno je Urša želela povedati, da se bo s to vrsto ulomkov računalo po dobro znanih pravilih, ki veljajo za številske ulomke. Te v 9. razredu zagotovo razume in zna že vsak.

$\frac{1}{x} + \frac{5}{x} = \frac{6}{x}$

$\frac{4}{3x^2} - \frac{1}{3x^2} = \frac{3}{3x^2}$

$\frac{1}{x} + \frac{5}{3-x} = \frac{3-x+5x}{x(3-x)} = \frac{3+4x}{3x-x^2}$

$\frac{x}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{x(x+2)-(x-2)}{x^2-4} = \frac{x^2+x+2}{x^2-4}$

25

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{3x-3}{5}$ c) $\frac{3}{x}$ č) $\frac{2}{5x}$

d) $\frac{11}{4a}$ e) $\frac{4}{3a}$ f) $-\frac{2}{c}$ g) $-\frac{8}{9x}$

26

a) $\frac{5}{7a}$ b) $\frac{14}{12b} = \frac{7}{6b}$ c) $\frac{8}{6x} = \frac{4}{3x}$

č) $\frac{10}{4x} = \frac{5}{2x}$ d) $\frac{c+5}{5c^2}$ e) $\frac{-3u}{3u} = -1$

27

Iskane vrednosti so:

a) $\frac{7}{a} \Rightarrow 1\frac{3}{4}$; in $-2\frac{1}{3}$ b) $-\frac{7}{x^3} \Rightarrow -7$ in 7

28

a) $\frac{a+3}{3a}$ b) $\frac{21-x}{7x}$ c) $\frac{9}{6a}$ č) $\frac{19}{6c}$

29

a) $-\frac{1}{6x}$ b) $\frac{25-c}{5c}$ c) $\frac{a-20}{8a^2}$ č) $\frac{11}{10c}$

30

a) $\frac{37}{6a}$ b) $\frac{1}{24x}$ c) $\frac{3}{5c}$ č) $\frac{41}{90u^2}$

31

a) $\frac{2a-1}{a}; a \neq 0$ b) $\frac{11}{x}; x \neq 0$

c) $\frac{2}{c+3}\ c \neq -3$ č) $\frac{5a-1}{5-a}; a \neq 5$

32

Iskane vrednosti so:

a) -1, ↯ b) 1, ↯

33

a) $\frac{5}{6(x+1)}$; $\frac{5}{12}$, ↯ b) $\frac{3-x}{2(x-5)}$; $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$

c) $\frac{5x}{8(2x-1)}$; $\frac{5}{8}$, $\frac{5}{24}$ č) $\frac{-7x-1}{84(3x-2)}$; $\frac{2}{21}$, $-\frac{1}{70}$

34

a) $\frac{x^2+16}{4x}$ b) $\frac{7}{4x}$ c) $\frac{5x}{66}$

č) $\frac{5-2x}{x^3}$ d) $\frac{2x^2}{x^2-9}$ e) $\frac{10x}{x^2-25}$

f) $\frac{8x}{x^2-4}$ g) $\frac{-x^2+7x-4}{x^2-1}$

35

a) $\frac{5x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{4+5x-x^2}{16-x^2}$ c) $\frac{7x+3}{x^2-1}$ č) $\frac{3x-1}{2x^2-2}$

36

a) $\frac{17}{24}$; $\frac{17}{30}$; $\frac{53}{60}$; $\frac{47}{80}$ b) $\frac{5}{12}$; $\frac{7}{24}$; $\frac{15}{112}$; $\frac{17}{144}$

Ugotovimo.

Iz nekaj zaporednih računov uvidimo:

$(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : 2 = (\frac{3+2}{6}) : 2 = \frac{5}{12}$

$(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) : 2 = (\frac{4+3}{12}) : 2 = \frac{7}{24}$

$(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}) : 2 = (\frac{5+4}{20}) : 2 = \frac{9}{40}$

$(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) : 2 = \frac{(n+1)+n}{2\ \ n\ \ (n+1)}$

Aritmetična sredina dveh ulomkov s števcem 1 in imenovalcem, ki sta zaporedni naravni števili, je enaka ulomku, ki ima za števec vsoto njunih imenovalcev, za imenovalec pa njun dvakratni produkt.

$$(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}) : 2 = \frac{2n+1}{2n(n+1)}$$

c) $\frac{3}{8}$; $\frac{4}{15}$; $\frac{8}{63}$; $\frac{9}{80}$

Ugotovimo.

Ulomki, ki dajo zanimiv rezultat, imajo v števcu število 1, v imenovalcu pa dve zaporedni lihi ali sodi števili.

Če preverimo prej ugotovljen obrazec, vidimo, da velja tudi za ta primer. Lahko pa se prepričamo tudi tako, da imenovalca tako izbranih števil izrazimo z algebrskima ulomkoma in izračunamo njuno artmetično sredino:

Liha imenovalca.

$\frac{1}{2}(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+3}) = \frac{2n+2}{(2n+1)(2n+3)}$

Enako velja za soda imenovalca.

$\frac{1}{2}(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+2}) = \frac{2n+1}{4n(n+1)}$

37

a) $\frac{6}{5a}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{b}$

č) $\frac{5}{y}$ d) $\frac{x^2}{225}$ e) $\frac{1}{(y+1)^2}$

38

a) 1 b) $\frac{1}{b}$ c) $\frac{1}{2x}$ č) $\frac{x^6}{3}$

39

a) $\frac{3}{x^2}$ b) $\frac{2}{x}$ c) $\frac{2x+4}{x^2}$ č) $\frac{6}{x^2-3x}$

d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{3x+6}{x^2-2x}$ f) $\frac{x^2-5x}{5x+25}$ g) $\frac{x^2-4}{x^2-9}$

40

a) $\frac{1}{3}$ b) 2 c) $\frac{6x^2}{x+5}$ č) $\frac{4(2a-3)}{3(a-4)}$

41

a) $\frac{5(x+1)}{7}$ b) $\frac{x^2-9}{x^2+3}$ c) $\frac{16x}{x-1}$ č) $\frac{4(a-8)}{a+1}$

42

a) $\frac{x}{3}$ b) $\frac{1}{3x-1}$ c) $\frac{2x-1}{x^3}$

43

a) 1 b) $\frac{56}{b}$ c) $\frac{1}{6}$ č) $\frac{x-8}{x}$

44

a) $\frac{5}{x+5}$ b) $\frac{12}{1-y}$ c) $\frac{x-2}{x}$ č) $\frac{4}{x(x-1)}$

45

a) $\frac{1-a}{9a}$ b) $\frac{3(x+3)(x-4)}{2(x-3)(x+4)}$ c) $\frac{(x-9)(x-3)}{(x-1)(x+9)}$

U. ♦ Do trdnega znanja

46

Ulomki niso določeni za naslednje vrednosti:

a) $a = 0$ **b)** $b = 3$
c) ni omejitve **č)** $x = 2$ in $x = -2$
d) $u = -8$ **e)** $z_1 = 3$ in $z_2 = -3$

47

Ulomki so določeni za vse vrednosti racionalnih spremenljivk, razen za:

a) $u \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ **b)** $x \in \mathbb{Q}\backslash\{7\}$
c) $x \in \mathbb{Q}$ **č)** $x \in \mathbb{Q}\backslash\{5, -5\}$
d) $x \in \mathbb{Q}$ **e)** $x \in \mathbb{Q}\backslash\{\frac{7}{3}\}$

48

	1	5	0	−1	0,25	0,5
$\frac{4x}{x-5}$	-1	⚡	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{4}{19}$	$\frac{4}{9}$
$\frac{x-1}{x+1}$	0	$\frac{2}{3}$	-1	⚡	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{3}$
$\frac{6}{4x-1}$	2	$\frac{6}{19}$	-6	$-\frac{6}{5}$	⚡	6
$\frac{x-1}{2x-1}$	0	$\frac{4}{9}$	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	⚡

49

a) $\frac{21}{9a^2}$ **b)** $\frac{2x^2+10x}{25-x^2}$

c) $\frac{2u^2+3u}{3u^2-2u}$ **č)** $\frac{-a^2+a+2}{a^2-1}$

50

a) $2;\ \frac{1}{a};\ -\frac{a}{3};\ -\frac{1}{a};\ a;\ \frac{a-1}{a}$

b) $\frac{1}{4};\ \frac{2a}{3};\ 5;\ \frac{6a^2}{6a-1};\ \frac{7a-2}{4a^3}$

c) $\frac{1}{4};\ \frac{1}{3a};\ \frac{4}{7a};\ \frac{3}{8a^2};\ \frac{1}{9a^5}$

51

a) $\frac{x+1}{4}$ **b)** $\frac{c}{c-4}$ **c)** -1

č) $\frac{4}{x}$ **d)** $\frac{x}{x+8}$ **e)** $\frac{3}{x+1}$

52

a) $\frac{19-3x}{20x}$ **b)** $\frac{11+5c}{10c}$ **c)** $\frac{21-a}{24a}$ **č)** $\frac{13+c}{42c^2}$

53

a) $\frac{2(x+1)}{3x}$ **b)** $\frac{3x-1}{4x}$ **c)** $\frac{55u-3}{6u}$ **č)** $\frac{6a-22}{a-5}$

54

a) $\frac{a^2}{a^2-1}$ **b)** $\frac{-9x}{x^2-9}$ **c)** $\frac{5-2c}{9-c^2}$ **č)** $\frac{3x-16}{(x-8)^2}$

55

a) $\frac{21}{a}$ **b)** $\frac{16}{9}$ **c)** $\frac{4}{b}$

č) 1 **d)** $\frac{3z}{z^2-1}$ **e)** $\frac{11}{u^5}$

56

a) 1 **b)** $x+8$ **c)** $\frac{x-3}{x^2}$ **č)** $\frac{a^2-25}{64x}$

57

a) $\frac{1}{x}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{x}$ **č)** 1

58

a) $\frac{x^2}{2}$ **b)** 125 **c)** $\frac{1}{x^2}$

č) $\frac{x}{9}$ **d)** $\frac{1}{3x}$ **e)** $7x^2$

59

a) $\frac{4}{x-2}$ **b)** $\frac{x-11}{x}$ **c)** $\frac{13}{1-c}$ **č)** $\frac{3}{x(x-1)}$

60

a) $4(3a+1)$ **b)** $\frac{x^2-16}{8}$

III. Enačbe in neenačbe

P. Realna števila. Računske operacije in zakoni. Enačbe

1

a) Pojem *razširitve števil* zajema dva dogovora:

- Vsaka razširjena množica števil mora vsebovati vse elemente prejšnje množice, zato velja: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- V vsaki razširjeni množici se ohranijo vsi veljavni računski zakoni, ki so veljali v prejšnji množici.

b) Množice števil »širimo« zato, da lahko neomejeno izvajamo vse osnovne računske operacije.
Z naravnimi števili lahko brez omejitev samo *seštevamo, množimo* in *potenciramo*.
Če želimo tudi *odštevati*, jih razširimo na cela števila.
Če želimo tudi *deliti*, jih razširimo na racionalna števila.
Za *korenjenje* brez omejitev potrebujemo še iracionalna števila.

c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Pojasnilo. Množica $\mathbb{R}$ vključuje *naravna, cela, racionalna in iracionalna števila.* Krajši opis je: *Realna števila so vsa racionalna in iracionalna števila skupaj.*

2

$13 \in \mathbb{N},\ \mathbb{Z}^+,\ \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{R}^+$ $-5 \in \mathbb{Z}^-,\ \mathbb{Q}^-,\ \mathbb{R}^-$
$\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{R}^+$ $0{,}75 \in \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{R}^+$
$0{,}\overline{2} \in \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{R}^+$ $+\sqrt{16} \in \mathbb{N},\ \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+,$
$0 \in \mathbb{Z},\ \mathbb{Q},\ \mathbb{R}$ $\frac{9}{1} \in \mathbb{N},\ \mathbb{Z}^+,\ \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{R}^+$
$-\frac{4}{7} \in \mathbb{Q}^-,\ \mathbb{R}^-$ $\frac{\sqrt{2}}{5} \in \mathbb{I}^+,\ \mathbb{R}^+$
$\sqrt{5} \in \mathbb{I}^+,\ \mathbb{R}^+$ $0{,}00594 \in \mathbb{Q}^+,\ \mathbb{R}^+$

3

Oba sogovornika se motita.
Obe zapisani števili, *ulomek* in *periodična decimalna številka* sta le različna zapisa istega racionalnega števila.
Nika je pozabila, da vsako racionalno število, *periodično* ali *neperiodično*, lahko zapišemo v obliki ulomka in obratno. Prezrla je tudi, da je $\frac{2}{9} = 0{,}222\ldots$
Luka je prezrl, da ima zapisana številka periodično neskončno mantiso in je zato to zapis racionalnega števila.

4

$0{,}3,\ 0{,}13,\ 0{,}05,\ 0{,}5,\ 0{,}\overline{1},\ 0{,}8,\ 0{,}75,\ 0{,}\overline{428571},\ 0{,}625,\ 0{,}\overline{6}$

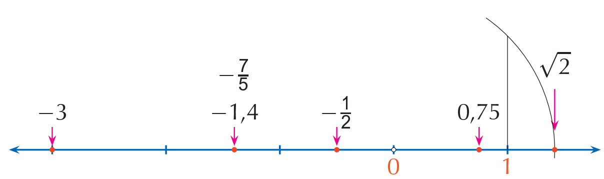
5

$\frac{5}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ 2\frac{1}{2},\ \frac{4}{9}$

6

Koren je racionalen v primerih a), č) in e), v preostalih primerih je iracionalen.

7



8

a) *Racionalna števila* imenujemo vsa števila, ki jih lahko zapišemo z ulomkom. Vsa števila, ki jih ne moremo zapisati z ulomkom, so *iracionalna števila.*
Obe vrsti števil lahko zapisujemo na dva načina:

- racionalna števila z ulomkom ali končno ali periodično decimalno številko;
- *iracionalna števila* lahko zapišemo kot decimalno število z neskončno mnogo decimalkami, zato ga lahko zapišemo