

## **SVET MATEMATIKE**

Priročnik in vaje iz matematike za 9. razred osnovne šole

CIP - Kataložni zapis o publikaciji  
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana

51(075.2)(035)  
51(075.2)(076.1)

RUTAR, Maks

Priročnik in vaje iz matematike za 9. razred osnovne šole ; Matematični orehi ; Vaje za ponovitev in utrditev osnovnošolske matematike / Maks Rutar ; [avtorica poglavja Matematični orehi Stanka Grum]. - 2. izd. - Ljubljana : Jutro, 2014. - (Svet matematike)

ISBN 978-961-6746-78-6

1. Rutar, Maks: Matematični orehi 2. Rutar, Maks: Vaje za ponovitev in utrditev osnovnošolske matematike 274787072

SVET MATEMATIKE

Maks Rutar

**PRIROČNIK**  
**IN**  
**VAJE IZ MATEMATIKE**

**ZA 9. RAZRED OSNOVNE ŠOLE**

+

**Matematični orehi**

+

**Vaje za ponovitev in utrditev  
osnovnošolske matematike**

**Maks Rutar**

**Svet matematike**

**PRIROČNIK IN VAJE IZ MATEMATIKE ZA 8. RAZRED OSNOVNE ŠOLE**

**Avtorica poglavja Matematični orehi: Stanka Grum**

*Strokovna recenzija:*

prof. dr. Lidija Zadnik - Stirn (I. - VIII. poglavje)

*Jezikovni pregled:*

Marta Pavlin, prof.

*Oprema in priprava ponatisa:*

Julijan Kodrič, ONZ Jutro

*Izdalo in založilo:*

Založništvo JUTRO, © Jutro d.o.o., Črnuška cesta 3, Ljubljana

*Tisk:* Grafis Trade

2. izdaja, 2014

*Literatura:*

F. Galič, I. Pucelj, F. Savnik, T. Uran: MATEMATIKA ZA 7. RAZRED OSNOVNE ŠOLE, DZS, Ljubljana 1989

F. Galič, I. Pucelj, F. Savnik, T. Uran: MATEMATIKA ZA 8. RAZRED OSNOVNE ŠOLE, DZS, Ljubljana 1988

L. Amendola, A. Egidi, G. Moreno: ARITMETICA, Le Monnier, Firenze 1990

L. Amendola, A. Egidi, G. Moreno: ALGEBRA, Le Monnier, Firenze 1990

**NAROČILA:**

JUTRO d.o.o., Črnuška c. 3, p. p. 4986, 1001 Ljubljana

Tel. (01) 561-72-30, 041 698-788

Faks (01) 561-72-35

E-pošta: Info@jutro.si • www.jutro.si

# PREDGOVOR

Večletna praksa pri poučevanju matematike v osnovni šoli in s tem v zvezi spoznanja po nujnem dodatnem delu z učenci ter njihovem samostojnem delu, je vzpodbudilo avtorja Maksa Rutarja, da je zbral in smiselno uredil nekaj najbolj posrečenih matematičnih nalog za 7. in 8. razred osnovne šole.

To je bila prva knjiga iz zbirke SVET MATEMATIKE za višje razrede osnovne šole z naslovom *Priročnik z vajami za ponavljanje, utrjevanje in poglobljanje znanja matematike za 7. in 8. razred osnovne šole*, ki je izšla v začetku šolskega leta 1991/92.

Prav tako je avtor želel, da bi priročnik zapolnil vrzel, ki jo učenci, starši in učitelji občutijo ob iskanju uspešnega izhoda iz stiske, kako priti do priročnih vaj, ki bi omogočale utrditi in poglobiti v šoli pridobljeno znanje.

Priročnik je bil izjemno dobro sprejet tako, da ga je že v istem letu uporabljal velik del šolske populacije.\*

V šolskem letu 1992/93 smo se namesto navadnega tretjega natisa raje odločili za dopolnitev in razširitev priročnika. Dodali smo poglavje o ulomkih ter ga razširili s poglavjem **Matematični orehi** avtorice Stanke Grum.

V šolskem letu 1996/97 pa smo se na temelju preteklih izkušenj, nasvetov in želja uporabnikov odločili skupno knjigo izdati v ločenih knjigah, posebej za 7. in posebej za 8. razred osemletne osnovne šole. Že prvotna, skupna izdaja knjige je imela pred sorodnimi knjigami številne prednosti. **Te pa so bile v njeni uporabnosti, saj je lahko služila kot učbenik, zbirka vaj in kot priročnik.** Nova izdaja te tri prednosti še utrjuje. Popolnoma novi sta poglavji **Množenje vektorja s številom** in **Odnosi med geometrijskimi elementi v prostoru**. Uporabnost knjige za 8. razred osemletne oz. 9. razred devetletne osnovne šole še povečuje poglavje **Vaje za ponovitev in utrditev osnovnošolske matematike**. Z njegovo pomočjo se bodo učenci v zadnjem razredu osnovne šole lažje spoprijeli predvsem s t.i. »zunanjim preverjanjem znanja«.

Upamo, da bo tako dopolnjen in razširjen priročnik, ki smo mu nekoliko spremenili prvotni naslov, še v večji meri budil pri učencih spoznanje, daje matematika čudovito miselno spletnje, ki je nujno potrebno za pridobivanje drugih sodobnih znanj.

Prepričani smo, da se bodo učenci z veseljem spoprijemali z vajami, ki so razdeljene v dve težavnostni stopnji. Na lažje, ki niso označene, in težje, ki so označene z deteljico (♣). Snov iz učnega načrta za 9. razred je razvrščena v devet poglavij; na začetku je jedrnata ponovitev snovi oz. razlaga, sledijo vaje. Na koncu poglavij so zapisane rešitve, zaradi česar odpade zamudno iskanje rešitev. Izjema je seveda sklop *Matematični orehi*, ki smo ga v celoti označili z dvema deteljicama. Da bi »matematične orehe« lažje trli, je pri rešitvah večine nalog skrbno izdelana pot reševanja.

*Sedaj pa veselo na delo!*

- ♣ - težje naloge, pa nikar se jih ne ustrašite
- ♣♣ - matematični orehi

---

\* Po sprejetju novega učnega načrta za pouk matematike v osnovni šoli v letu 2011, smo v Založništvu Jutro priročnik umaknili iz prodaje. V času, ko priročnik ni bil naprodaj, smo se soočali s stalnim povpraševanjem po njem, zato smo se odločili za ponovno izdajo v letu 2014.

Iz strokovne ocene prve izdaje knjige

**SVET MATEMATIKE, Priročnik in vaje iz matematike za 7. in 8. r. osnovne šole:**

*Knjiga kot celota kaže avtorjevo strokovno trdnost, njegov dober pregled nad učno snovjo z vidika pomembnosti in težavnosti za učenca, med didaktičnimi vidiki pa zlasti poudarek na načelih nazornosti, sistematičnosti in postopnosti.*

*Avtor ima matematiko rad in k takemu odnosu pomaga tudi reševalcu nalog.*

*Priročnik zmanjšuje vrzel v tovrstni tržni ponudbi matematične literature in je lahko dober pripomoček velikemu delu naših osnovnošolcev, pa tudi mnogim osnovnošolskim učiteljem.*

*Strokovna ocena št. 603-03-09/91-NM  
Zavoda R Slovenije za šolstvo in šport*

# KAZALO

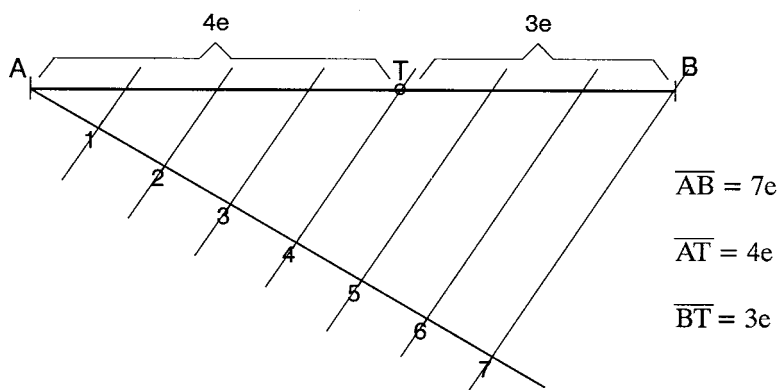
<b>I. SORAZMERJE</b> .....	<b>9</b>
<b>II. MNOŽENJE VEKTORJA S SKALARJEM</b> .....	<b>16</b>
<b>III. PODOBNOST V RAVNINI</b> .....	<b>21</b>
Podobni trikotniki .....	22
<b>IV. LINEARNA FUNKCIJA</b> .....	<b>33</b>
<b>V. LINEARNE ENAČBE Z ENO NEZNANKO</b> .....	<b>40</b>
1. Reševanje enačb .....	40
2. Uporaba enačb .....	48
<b>VI. ODNOSI MED GEOMETRIJSKIMI ELEMENTI V PROSTORU</b> .....	<b>52</b>
Točka in premica – točka in ravnina .....	53
Premica in ravnina .....	53
Dve premici .....	54
Dve ravnini .....	54
Kot med premicama .....	58
<b>VII. POVRŠINE IN PROSTORNINE GEOMETRIJSKIH TELES</b> .....	<b>61</b>
1. PRIZMA .....	61
Površina prizme .....	62
Kvader .....	66
Kocka .....	69
Prostornina prizme .....	71
2. PIRAMIDA .....	75
Površina piramide .....	75
Prostornina piramide .....	78
3. VALJ .....	81
Površina valja .....	82
Prostornina valja .....	85
4. STOŽEC .....	88
Površina stožca .....	89
Prostornina stožca .....	93
5. KROGLA .....	96
Površina krogle .....	96
Prostornina krogle .....	96

<b>VIII. SISTEM DVEH LINEARNIH ENAČB Z DVEMA NEZNANKAMA</b> . . . . .	<b>100</b>
<b>IX. ULOMKI</b> . . . . .	<b>106</b>
1. Razširjanje ulomkov . . . . .	107
2. Krajšanje ulomkov . . . . .	107
3. Množenje in deljenje ulomkov . . . . .	109
4. Seštevanje in odštevanje ulomkov . . . . .	109
<b>MATEMATIČNI OREHI</b> . . . . .	<b>121</b>
Sorazmerja . . . . .	122
Podobnost v ravnini . . . . .	124
Koordinatni sistem v ravnini, funkcije . . . . .	131
Odnosi med geometrijskimi elementi – naloge s koti $30^\circ$ , $45^\circ$ , $60^\circ$ . . . . .	135
Enačbe, naloge z besedilom, sistemi enačb . . . . .	143
Geometrijska telesa . . . . .	158
<b>PONOVITEV IN UTRDITEV OSNOVNOŠOLSKE MATEMATIKE</b> . . . . .	<b>171</b>
Množice . . . . .	172
Merske enote . . . . .	175
Izrazi . . . . .	177
Načrtovanje večkotnikov . . . . .	178
Krožnica, krog . . . . .	181
Veččleniki . . . . .	183
Sorazmerja . . . . .	184
Pitagorov izrek . . . . .	185
Vektorji . . . . .	187
Linearne enačbe z eno neznanko . . . . .	191
Sorazmerja in podobnost . . . . .	193
Linearna funkcija . . . . .	196
Geometrijska telesa . . . . .	197
<b>REŠITVE</b> . . . . .	<b>200</b>
<b>DODATNI OBRAZCI IN TABELE</b> . . . . .	<b>217</b>
1a. Ravninska geometrija . . . . .	218
1b. Prostorska geometrija . . . . .	223
2. Pitagorejske trojice . . . . .	227
3. Kvadrati, kubi, kvadratni in kubični koreni naravnih števil od 1 do 1000 . . . . .	228



## PRIMER

Na daljici AB, ki je razdeljena na 7 enakih delov, je točka T.



Iz slike lahko razberemo več sorazmerij:

$$\begin{array}{llll}
 AT : BT = 4 : 3 & \overline{AT} = 4e & \overline{BT} = 3e & \overline{AB} = 7e = 4e + 3e \\
 AB : AT = 7 : 4 & \overline{AB} = 7e & \overline{AT} = 4e & \\
 AB : BT = 7 : 3 & \overline{AB} = 7e & \overline{BT} = 3e & 
 \end{array}$$

Na daljici  $\overline{AB}$  ( $\overline{AB} = 8 \text{ cm}$ ) določi točko T tako, da je:

54.  $AT : BT = 3 : 4$

56.  $AB : BT = 6 : 5$

55.  $AT : AB = 1 : 3$

57.  $AB : AT = 1 : 0,4$

Na daljici  $\overline{AB}$  ( $AB = 10 \text{ cm}$ ) določi točki M in N tako, da je:

58.  $AB : AM : MN = 8 : 3 : 3$

60.  $AN : BN : BM = 7 : 2 : 5$

59.  $AM : MN : BN = 2 : 3 : 1$

61.  $AB : MB : MN = 8 : 6 : 5$

62. Čistilo in vodo mešamo v razmerju 1 : 4.

a) Koliko čistila moramo doliti 8 dl vode?

b) Koliko čistila in koliko vode moramo zmešati, da dobimo 1'5 l mešanice?

63. Bolha meri približno 2'5 mm, v višino pa skoči prek 30 cm. Kako visoko bi lahko skočil ti, če bi imel njene sposobnosti?

64. Izdelali smo reliefni model Zemlje s premerom 2 m.

a) Kako visok je Mt. Everest na tem modelu?

b) Kako dolga je črta, ki predstavlja najdaljšo reko na Zemlji?

Višina Mt. Everesta je 8848 m, najdaljša reka je Nil – 6670 km.

65. Železo in baker smo zmešali v razmerju 5 : 3 in iz te zlitine naredili kocko z robom 2 dm. Koliko tehta ta kocka, če je gostota železa  $7800 \text{ kg/m}^3$  in bakra  $8800 \text{ kg/m}^3$ ?

66. Krogla s polmerom 10 cm naj predstavlja Zemljo. Izračunaj:

- polmer krogle, ki bi predstavljala Sonce,
- polmer krogle, ki bi predstavljala Luno,
- oddaljenost modela Lune od modela Zemlje in
- oddaljenost modela Zemlje od modela Sonca.

$$R_s = 739627 \text{ km} \quad R_z = 6370 \text{ km} \quad R_L = 1739 \text{ km}$$

$$\overline{ZS} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ km} \quad \overline{ZL} = 3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$$

### REŠITVE:

- |        |                     |                      |                     |                        |                |
|--------|---------------------|----------------------|---------------------|------------------------|----------------|
| 1.: 5  | 6.: 3               | 11.: $\frac{3}{2}$   | 16.: 21             | 21.: $\pm 6$           | 26.: $\pm 4,8$ |
| 2.: 20 | 7.: 2               | 12.: $\frac{2}{5}$   | 17.: 0,5            | 22.: $\pm 10$          | 27.: 27        |
| 3.: 7  | 8.: 6               | 13.: 13              | 18.: 32             | 23.: $\pm 12$          | 28.: 8; 40     |
| 4.: 2  | 9.: 35              | 14.: $\frac{17}{30}$ | 19.: $\frac{16}{9}$ | 24.: $\pm 15$          | 29.: 26; 18    |
| 5.: 9  | 10.: $\frac{9}{10}$ | 15.: $2\frac{1}{4}$  | 20.: $\frac{7}{24}$ | 25.: $\pm \frac{5}{9}$ | 30.: 66; 24    |

31.: 14; 38

34.: 35; 10 ali  $-35$ ;  $-10$

37.: 16; 72; 56

32.: 8; 2

35.: 15; 21; 6

38.: 35; 21; 28

33.: 9; 15 ali  $-9$ ;  $-15$

36.: 13; 26; 52

39.: 150; 45; 60

40.: 45; 25; 35

43.:  $50\sqrt{2}$  cm

46.:  $45^\circ$ ;  $63^\circ$ ;  $72^\circ$

41.:  $96 \text{ cm}^2$

44.:  $300 \text{ cm}^2$

47.:  $24^\circ$ ;  $48^\circ$ ;  $108^\circ$

42.: 90 cm

45.:  $20^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $100^\circ$

48.:  $90^\circ$ ;  $75^\circ$ ;  $15^\circ$

49.:  $54^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $66^\circ$

51.:  $180 \text{ cm}^2$

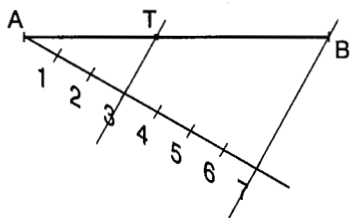
53.:  $150 \text{ cm}^2$

50.:  $44^\circ$ ;  $56^\circ$ ;  $80^\circ$

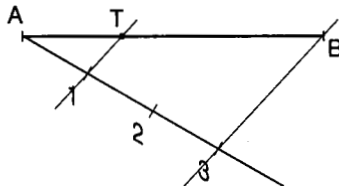
52.: 28cm;  $48 \text{ cm}^2$

Rešitve vaj od 54. do 61. so narisane v razmerju 1 : 2!

54.:



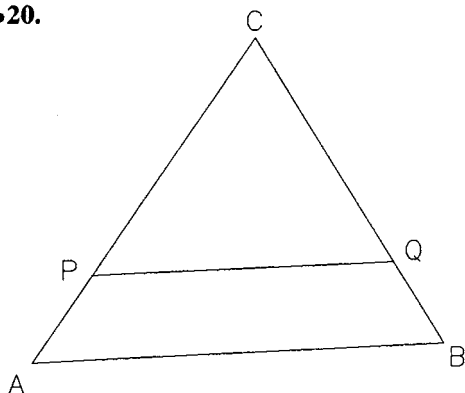
55.:



18.  $a = 52 \text{ cm}$        $a' = 44,2 \text{ cm}$   
 $b = 18 \text{ cm}$        $b' = 18 \text{ cm}$   
 $c = 52 \text{ cm}$        $c' = 44,2 \text{ cm}$

19.  $a = 16 \text{ dm}$        $a' = 136 \text{ cm}$   
 $b = 17 \text{ dm}$        $b' = 144,5 \text{ cm}$   
 $c = 18 \text{ dm}$        $c' = 153 \text{ cm}$

♣20.



$$\begin{aligned} \overline{AB} &\parallel \overline{PQ} \\ \overline{AB} &= 12 \text{ cm} \\ \overline{BC} &= 9 \text{ cm} \\ \overline{CQ} &= 7,5 \text{ cm} \\ \overline{PQ} &= ? \end{aligned}$$

21. Stranice trikotnika  $\triangle ABC$  merijo 17 cm, 23 cm in 35 cm. Najkrajša stranica podobnega trikotnika  $\triangle A'B'C'$  meri 68 cm. Izračunaj ostali dve stranici.
22. V trikotniku  $\triangle ABC$  merijo stranice 81 m, 93 m in 51 m. V podobnem trikotniku  $\triangle A'B'C'$  pa meri najdaljša stranica 31 m. Izračunaj ostali dve stranici.
23. Stranice trikotnika  $\triangle ABC$  merijo 9 cm, 12 cm in 15 cm. Najkrajša stranica podobnega trikotnika  $\triangle A'B'C'$  je enaka obsegu trikotnika  $\triangle ABC$ . Izračunaj obseg trikotnika  $\triangle A'B'C'$ .
- ♣24. V pravokotnem trikotniku  $\triangle ABC$  merita kateti 33 cm in 56 cm. Izračunaj kateti podobnega trikotnika  $\triangle A'B'C'$ , katerega hipotenuza meri 97,5 cm.
- ♣25. Iz podatkov  $\overline{AB} = 18 \text{ cm}$ ,  $\overline{DE} = 9 \text{ cm}$ ,  $\overline{CE} = 12 \text{ cm}$  in  $AB \parallel DE$  ter  $CD \parallel AE$  izračunaj  $\overline{BC}$ .

Poleg že na začetku poglavja omenjenih lastnosti, velja za podobne trikotnike še:

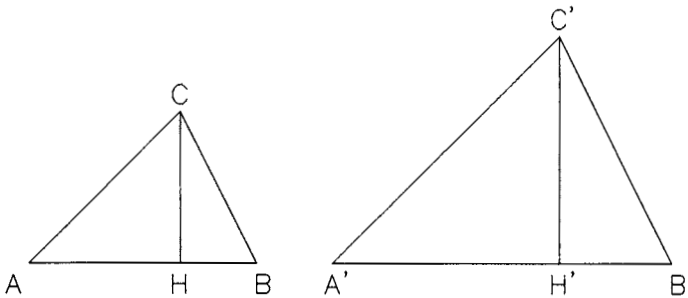
**ISTOLEŽNE VIŠINE PODOBNIH TRIKOTNIKOV SO V ENAKIH RAZMERJIH. V ENAKEM RAZMERJU STA TUDI OBSEGA.**

$$\begin{aligned} a : a' &= v_a : v_{a'} = v_b : v_{b'} = v_c : v_{c'} = 1 : k \\ a : a' &= o : o' = 1 : k \end{aligned}$$

**RAZMERJE PLOŠČIN PODOBNIH TRIKOTNIKOV JE ENAKO KVADRATU PODOBNOSTNEGA KOEFICIENTA.**

$$p : p' = 1 : k^2$$

S pomočjo slike izračunaj neznane količine. Vse mere so v cm:



26.  $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = 18$        $\frac{\overline{CH}}{C'H'} = 15$   
 $\frac{\overline{A'B'}}{A'B'} = 3,6$        $\frac{\overline{C'H'}}{C'H'} = ?$
27.  $\frac{\overline{BC}}{B'C'} = 9,4$        $\frac{\overline{CH}}{C'H'} = 6$   
 $\frac{\overline{B'C'}}{B'C'} = 42,3$        $\frac{\overline{C'H'}}{C'H'} = ?$
28.  $\frac{\overline{BC}}{A'B'} = 18$        $\frac{\overline{CH}}{C'H'} = ?$   
 $\frac{\overline{A'B'}}{A'B'} = 24$        $\frac{\overline{C'H'}}{C'H'} = 16$
29.  $\frac{\overline{AC}}{A'C'} = 35$        $\frac{\overline{CH}}{C'H'} = ?$   
 $\frac{\overline{A'C'}}{A'C'} = 14$        $\frac{\overline{C'H'}}{C'H'} = 21$
30.  $\frac{\overline{CH}}{C'H'} = 54$        $\frac{\overline{AB}}{A'B'} = 36$   
 $\frac{\overline{C'H'}}{C'H'} = 30$        $\frac{\overline{A'B'}}{A'B'} = ?$
31.  $\frac{\overline{CH}}{C'H'} = 3$        $\frac{\overline{AC}}{A'C'} = ?$   
 $\frac{\overline{C'H'}}{C'H'} = 5$        $\frac{\overline{A'C'}}{A'C'} = 4,5$

32. Trikotnik  $\Delta ABC$  je podoben trikotniku  $\Delta A'B'C'$ . Koeficient podobnosti je 5. Obseg trikotnika  $\Delta ABC$  meri 120 cm, dve stranici trikotnika  $\Delta A'B'C'$  pa 8 cm in 10 cm. Izračunaj stranice trikotnika  $\Delta ABC$ .

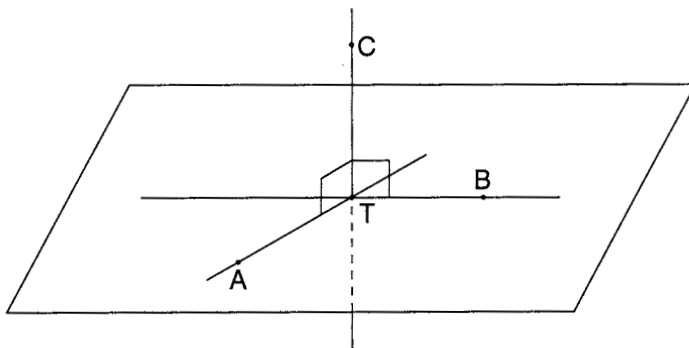
## VAJE

**Pari oglišč kocke določajo premice. Kolikšen kot oklepata premici:**

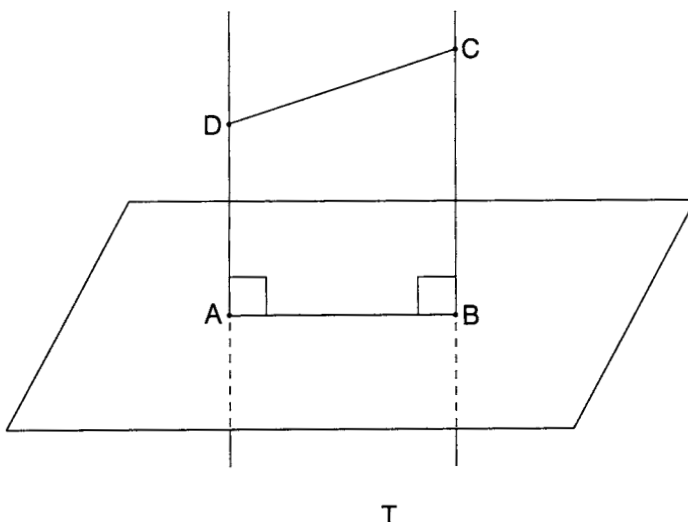
- |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1. AB in AE, | 3. FH in DH, | 5. CH in AF, | 7. BE in CH, |
| 2. AD in FG, | 4. EH in DE, | 6. BC in FH, | 8. AC in AF. |

**Katere premice določene z oglišči kocke so**

9. pravokotne na a) ravnino ABC, b) ravnino ADH;  
 10. poševnice a) ravnine DCG, b) ravnine EFG.
11. O premicah  $a$ ,  $b$  in  $c$  veš, da je  $a \cap b = \{C\}$ ,  $a \cap c = \{B\}$  in  $b \cap c = \{A\}$ . Kolikšen kot oklepata premici  $a$  in  $c$ , če je kot med  $a$  in  $b$  enak  $36^\circ$ , med  $b$  in  $c$  pa  $75^\circ$ ?
12. Premici  $m$  in  $n$  sta vzporedni. Premica  $p$  oklepa  $z$  kot  $45^\circ$ . Kolikšen je kot med  $p$  in  $n$ ?
- ♣13. Izračunaj  $\overline{AB}$ , če je  $\overline{TC} = 8 \text{ cm}$ ,  $\overline{AC} = 10 \text{ cm}$ ,  $\sphericalangle TBC = 45^\circ$  in  $\sphericalangle ATB = 90^\circ$ .



- ♣14. Izračunaj  $\overline{AB}$ , če je  $\overline{CD} = 41 \text{ cm}$ ,  $\overline{AD} = 19 \text{ cm}$  in  $\overline{BC} = 28 \text{ cm}$ .



**REŠITVE:**1.:  $90^\circ$ 3.:  $90^\circ$ 5.:  $90^\circ$ 7.:  $0^\circ$ 2.:  $0^\circ$ 4.:  $45^\circ$ 6.:  $45^\circ$ 8.: Trikotnik  $\triangle ACF$  je enakostranični –  $60^\circ$ .

9.: a) AE, BF, CG, DH

b) AB, CD, EF, GH

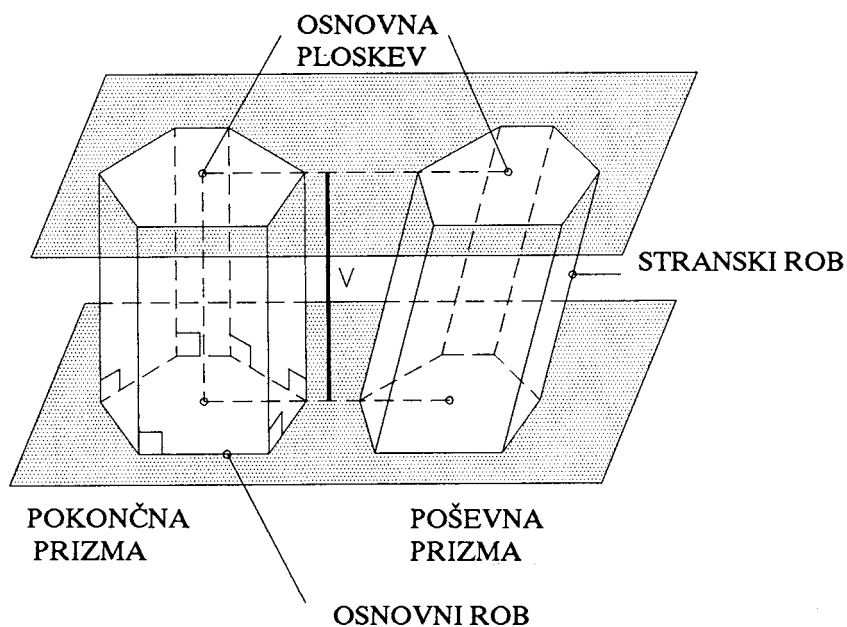
10.: a) AC, AG, AH, BD, BG, BH, CE, CF, DE, DF, EG, FH

b) AF, AG, AH, BE, BG, BH, CE, CF, CH, DE, DF, DG

11.:  $69^\circ$ 13.:  $10\text{ cm}$ 12.:  $45^\circ$ 14.:  $40\text{ cm}$

# VII. POVRŠINA IN PROSTORNINA GEOMETRIJSKIH TELES

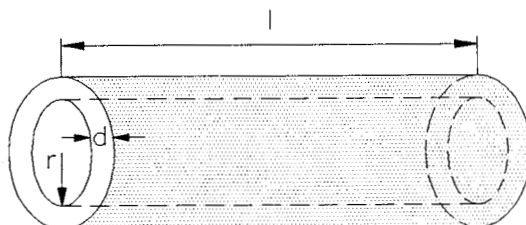
## 1. PRIZMA



$v$  = VIŠINA PRIZME

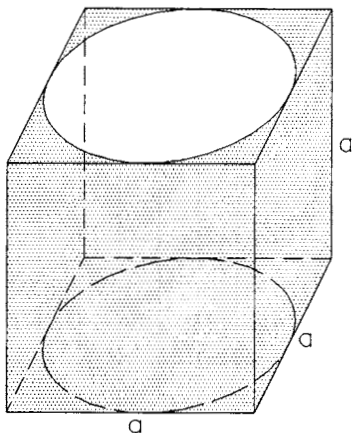
## VAJE

1. Izračunaj površino valja, če meri polmer osnovne ploskve 15 cm in višina 21 cm.
2. Osnovna ploskev valja meri  $42,25\pi$  cm<sup>2</sup>. Izračunaj plašč, če je razmerje med višino in polmerom osnovne ploskve 9 : 13.
3. Pravokotnik s stranicama 32 cm in 12 cm zavrtimo okoli daljše stranice. Izračunaj površino vrtenine.
4. Ploščina osnega preseka enakostraničnega valja meri 144 cm<sup>2</sup>. Izračunaj površino tega valja.
5. Ploščina osnega preseka valja meri 60 cm<sup>2</sup>. Izračunaj površino tega valja, če je njegova višina 5 cm.
6. Ploščina osnega preseka valja meri 126 cm<sup>2</sup>. Izračunaj površino, če meri polmer osnovne ploskve 9 cm.
7. Plašč valja meri  $180\pi$  cm<sup>2</sup>. Izračunaj površino, če meri polmer osnovne ploskve 9 cm.
8. Plašč valja meri  $150\pi$  cm<sup>2</sup>. Izračunaj površino, če meri višina valja 15 cm.
- ♣ 9. Plašč enakostraničnega valja je enak ploščini pravokotnika z obsegom 32 cm in razmerjem med osnovnico in višino 5 : 3. Izračunaj površino valja.
- ♣ 10. Plašč enakostraničnega valja je pravokotnik z višino 10 cm. Izračunaj površino tega valja.
11. Izračunaj površine narisanih teles.
  - ♣ a)  $r = 10$  cm  
 $d = 1$  cm  
 $l = 35$  cm

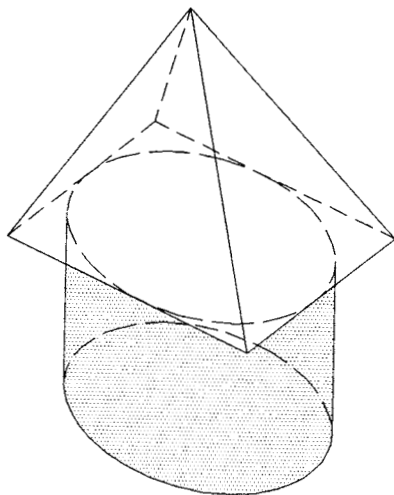




♣ b)  $a = 1 \text{ m}$



♣ c) Osnovni rob piramide  $a = 18 \text{ cm}$ ,  
stranska višina piramide  $v_1 = 15 \text{ cm}$ ,  
višina piramide je enaka višini valja.



### REŠITVE:

1.:  $1080\pi \text{ cm}^2$

5.:  $132\pi \text{ cm}^2$

8.:  $200\pi \text{ cm}^2$

11a.:  $1512\pi \text{ cm}^2$

2.:  $58,5\pi \text{ cm}^2$

6.:  $288\pi \text{ cm}^2$

9.:  $90 \text{ cm}^2$

11b.:  $(6 + \frac{\pi}{2}) \text{ m}^2$

3.:  $1056\pi \text{ cm}^2$

7.:  $342\pi \text{ cm}^2$

10.:  $471 \text{ cm}^2$

11c.:  $1542 \text{ cm}^2$

4.:  $216\pi \text{ cm}^2$

**PROSTORNINA VALJA**

Za prostornino (V) valja velja:

$$V = O \cdot v$$

$$\boxed{V = \pi r^2 v}$$

Za enakostranični valj ( $v = 2r$ ) pa velja:

$$V = \pi r^2 \cdot 2r$$

$$\boxed{V = 2\pi r^3}$$

**VAJE**

1. Izračunaj prostornino valja, katerega polmer osnovne ploskve meri 7 cm, višina pa 12 cm.
2. Premer osnovne ploskve valja meri 6 dm. Izračunaj prostornino tega valja, če je višina 3 krat daljša od polmera osnovne ploskve.
3. Izračunaj prostornino enakostraničnega valja, katerega višina meri 16 cm.
4. Izračunaj prostornino valja, če je vsota med polmerom osnovne ploskve in višino 20 cm, njuno razmerje pa 3 : 7.
5. Izračunaj prostornino enakostraničnega valja, če meri njegova površina  $471 \text{ cm}^2$ .
6. Premer valja je za 2 dm daljši od višine. Izračunaj a) prostornino in b) površino tega valja, če je vsota premera in višine enaka 26 dm.
7. Površina valja meri  $376,80 \text{ cm}^2$ . Izračunaj prostornino, če je razmerje med plaščem in osnovnima ploskvama 2 : 3.
8. Plašč valja meri  $78,5 \text{ dm}^2$ . Izračunaj prostornino, če veš, da je ploščina osnovne ploskve enaka plašču.
9. Izračunaj površino valja, če je visok 15 cm in meri njegova prostornina  $2,16\pi \text{ dm}^3$ .
10. Prostornina enakostraničnega valja meri 50,24 l. Izračunaj polmer osnovne ploskve.
11. Izračunaj a) plašč in b) površino enakostraničnega valja, če meri njegova prostornina  $401,92 \text{ dm}^3$ .
12. Izračunaj površino valja, če meri prostornina  $942 \text{ cm}^3$ , plašč pa  $376,8 \text{ cm}^2$ .

## VAJE

Okrajšaj naslednje ulomke:

1. a)  $\frac{3a}{6}$     b)  $-\frac{8}{24a}$     c)  $\frac{15a}{7a}$     č)  $\frac{8a}{12a}$     d)  $\frac{-9a^3}{-36a^3}$     e)  $\frac{12a^5}{-18a^6}$

2. a)  $\frac{ab}{a^2}$     b)  $\frac{3ab^2}{b^3}$     c)  $\frac{a^2b}{7a}$     č)  $\frac{a^3b^2}{4a^5}$     d)  $\frac{5a^2b}{5b}$     e)  $\frac{15a^5b}{21a^6}$

3. a)  $\frac{6x^3y}{y}$     b)  $\frac{xy^3}{2y^2}$     c)  $\frac{4x^3y}{y^4}$     č)  $\frac{12x^4y^4}{9y^4}$     d)  $\frac{14x^3y^2}{35x^2}$     e)  $\frac{24x^2y^3}{36x^5}$

4. a)  $\frac{2x^3y}{xy}$     b)  $\frac{5xy^2}{3x^3y^2}$     c)  $\frac{10x^5y^3}{6x^3y^5}$     č)  $\frac{x^4y}{3x^4y}$     d)  $\frac{x^5y^5}{5x^2y^3}$     e)  $\frac{6x^7y^8}{14x^5y^{10}}$

5. a)  $\frac{3a^3b^2c^3}{4ab^3c^2}$     b)  $\frac{6x^2y^2z^3}{9xy^3z}$     c)  $\frac{9a^6b^4c^7}{12a^5b^4c^7}$     č)  $\frac{x^{10}y^3z^4}{x^{10}y^2z^5}$     d)  $\frac{15a^7b^4c^4}{45a^8b^4c^5}$     e)  $\frac{x^3y^2x^3z^5}{x^2yz^4x}$

♣ 6. a)  $\frac{3a+3b}{3}$     d)  $\frac{6xy+6y^2}{8y}$     h)  $\frac{3xy}{x^2-3x+xy}$   
 b)  $\frac{6}{2a-2b}$     e)  $\frac{2x^5-x^3}{3x^3}$     i)  $\frac{2b^5+4b^4-6b^3}{8b^3}$   
 c)  $\frac{4a}{5a+ab}$     f)  $\frac{7a^2-a^2b}{a^2b}$     j)  $\frac{5x^4-3x^3+x^2}{5x^4y}$   
 č)  $\frac{x^2-xy}{2x}$     g)  $\frac{3b^3-ab^2}{ab^2}$     k)  $\frac{2xy^2-3x^2y^2+x^2y}{2xy}$

♣ 7. a)  $\frac{x+y}{3x+3y}$     č)  $\frac{a^2c+b^2c}{2a^2+2b^2}$     f)  $\frac{x+y}{x^2-y^2}$     i)  $\frac{2a+6}{a^2-9}$   
 b)  $\frac{2x-2y}{5x-5y}$     d)  $\frac{a^2+3ab}{2a+6b}$     g)  $\frac{x^2-y^2}{x-y}$     j)  $\frac{2a^2-50}{3a-15}$   
 c)  $\frac{xz+yz}{x+y}$     e)  $\frac{a^3+2a^2b}{4a+8b}$     h)  $\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$     k)  $\frac{a^4-16}{a^3+4a}$

Zapiši naslednje količnike kot okrajšane ulomke:

8. a)  $(-4a^2b) : (4ab^2)$       b)  $(24a^3b^5c) : (8a^2b^3c^2)$       c)  $(-7a^3b^3c^2) : (-14a^3b^4)$

9. a)  $(-16x^4yz^3) : (48yz^4)$       b)  $(5x^2y^4z^4) : (4xy^5z^3)$       c)  $(-5xy^3z) : (5xy^2z)$

10. a)  $(6a^3b^4c^2) : (\frac{1}{2}a^2b^5)$       b)  $(\frac{1}{4}a^3b^2c^4) : (2a^3b^2c^5)$       c)  $(\frac{3}{5}ab^2c^3) : (-\frac{2}{5}a^3b^2c)$

11. a)  $(\frac{2}{3}x^3y^4) : (-\frac{4}{3}xy^3)$       b)  $(\frac{5}{7}x^3y^3z) : (\frac{15}{14}xy^3z)$       c)  $(\frac{5}{14}ab^3x^2y) : (\frac{25}{42}a^2bx^2)$

♣ 12. a)  $(3x^2 + 12) : (x^2 + 4)$       b)  $(x^2 - 16) : (x + 4)$       c)  $(x - 1) : (5x^2 - 5)$

Izračunaj zmnožke (količnike) ulomkov:

13. a)  $\frac{15a}{16} \cdot \frac{12}{25a^2}$       b)  $\frac{16}{35b^3} \cdot \frac{7b^4}{48}$       c)  $\frac{12a}{b} \cdot \frac{7b^3}{10a^5} \cdot \frac{5a^2}{42b}$

14. a)  $\frac{8x^4}{15y^3z^2} \cdot \frac{5y^4z}{12x^3y}$       b)  $\frac{2z^3}{45x^2y} \cdot \frac{18x^4y^2}{5z^2}$       c)  $\frac{x^2y}{z} \cdot \frac{y^2z^2}{x^4} \cdot \frac{x}{y^4z^3}$

15. a)  $9a^3b^2 \cdot \frac{c}{36a^2b^3}$       b)  $\frac{5a^2}{21b^3c^4} \cdot 14ab^2c^3$       c)  $6a^7b \cdot \frac{c}{45a^8b^5} \cdot 10a^2b^3$

16. a)  $\frac{10x^3}{21y^2} : \frac{15x^2}{14y^3}$       b)  $\frac{12}{25y^5} : \frac{9x}{10y^6}$       c)  $\frac{4x^3}{9y^4} : \frac{6y^2}{10x^3} : \frac{15x^5}{27y^8}$

17. a)  $\frac{3a^2b^3}{5c^4} : \frac{c^2}{ab^2} \cdot \frac{10c^3}{a^5} : \frac{6a^2b^4}{c^3}$       b)  $\frac{x^3}{11y^2z} : (6x^2yz) : \frac{2yz}{33x^3} : \frac{x^5}{y^4z^4}$

18. a)  $\frac{x+1}{y^3} \cdot \frac{y}{x+1}$       b)  $\frac{xy^2}{y-2} \cdot \frac{y+2}{xy^2}$       c)  $\frac{(x+5)^2}{6x^2y^3} \cdot \frac{3x^3y^2}{x+5}$

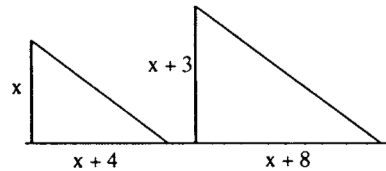
♣ 19. a)  $\frac{3a^2+4}{a^2} \cdot \frac{a^3}{2(3a^2+4)}$       b)  $\frac{a+1}{a-2} \cdot \frac{4}{2a+2}$       c)  $\frac{a^3-3}{a+3} \cdot \frac{2a+6}{5a^3-15}$

♣ 20. a)  $\frac{x^2-4}{5x-10} \cdot \frac{15x}{x+2}$       b)  $\frac{x^2y-9y}{x} : (xy^2+3y^2)$       c)  $\frac{x+1}{2x+8} : \frac{x^2-4x}{6} \cdot \frac{x^3-16x}{3x+3}$

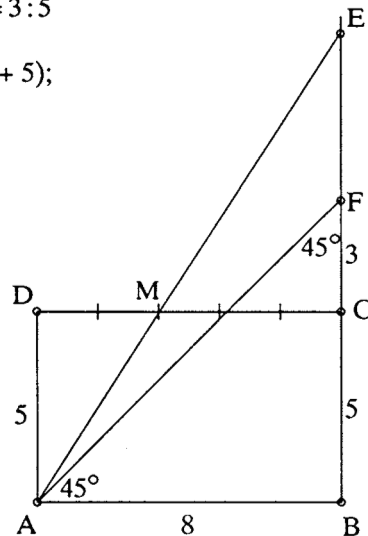
13. V krožnici s polmerom 4 cm je dana 5 cm dolga tetiva, ki pripada središčnemu kotu  $\alpha$ . Nariši koncentrično krožnico, v kateri istemu središčnemu kotu pripada 3 cm dolga tetiva. Izračunaj ploščino kolobarja, določenega s krožnicama.
14. Dokaži, da je tisti del srednjice trapeza, ki leži med obema diagonalama, enak polovični razliki osnovnic trapeza.
15. Dva kroga s polmeroma 2 cm in 6 cm se dotikata od zunaj. Izračunaj ploščino trikotnika, ki ga določa dotikališče teh krogov, in točki, v katerih se krogov dotika ena od skupnih tangenc.
16. Dokaži, da razpolovišča stranic poljubnega trikotnika in nožišče katerekoli višine, določajo oglišča enakokrakega trapeza.
17. Dan je enakokrak trikotnik  $\triangle ABC$  z osnovnico  $\overline{AB} = 48$  cm. Višina AD, narisana na krak BC, deli dani trikotnik na dva dela, katerih ploščini sta v razmerju 1 : 3. Izračunaj ploščino trikotnika  $\triangle ABD$ .
18. Na nasprotnih stranicah pravokotnika ABCD ( $\overline{AB} = a$ ,  $\overline{BC} = b$ ) sta točki M in N tako, da je  $\overline{AM} = \frac{2}{3}a$  in  $\overline{CN} = \frac{a}{2}$ . Daljici AC in MN se sekata v točki S. Kolišen del (v %) ploščine pravokotnika ABCD predstavljata ploščini trikotnikov  $\triangle AMS$  in  $\triangle CNS$  (obe skupaj)?
19. Na premici  $p$  izberi točki A in B, nariši pravokotnici  $AA_1$  in  $BB_1$  na isto stran premice  $p$ . Presečišče  $A_1B$  in  $AB_1$  označi s  $C_1$ . Nariši še pravokotnico  $\overline{C_1C}$  na premico  $p$  (točka C je na  $p$ ). Izrazi dolžino daljice  $CC_1$  z dolžino daljic  $\overline{AA_1} = a$  in  $\overline{BB_1} = b$  in dokaži, da dolžina te daljice ni odvisna od razdalje med A in B.
20. Stranice trikotnika merijo  $a = 8$  cm,  $b = 18$  cm in  $c = 12$  cm. Skozi težišče T je narisana premica  $p$ , vzporedna s stranico  $a$ . Določi obseg trapeza, ki ga oblikujeta premica  $p$  in trikotnik.
21. V trapezu ABCD meri  $\overline{AB} = 12$  cm,  $\overline{CD} = 8$  cm in višina  $\overline{CE} = 9$  cm. Na CE izberi točki P in Q tako, da je z njima višina razdeljena na 3 enake dele. Skozi P in Q nariši vzporednici k osnovnicama trapeza in izračunaj ploščine likov, na katere vzporednici razdelita trapez.
22. Dve različni krožnici se dotikata obeh krakov pravega kota. Središče manjše krožnice pripada večji krožnici. Izračunaj (na dve decimalki natančno):
  - razmerje polmerov,
  - razmerje obsegov,
  - razmerje ploščin obeh krogov.
23. Pravokotni trikotnik  $\triangle ABC$  ima hipotenuzo  $\overline{AB} = 1$  m. Kateta AC je premer polkroga, ki seka hipotenuzo v točki D,  $\overline{BD} = 36$  cm. Izračunaj ploščino trikotnika  $\triangle ABC$ .
24. Dokaži, da premica skozi presečišče podaljškov krakov trapeza in skozi razpolovišče ene osnovnice razpolavlja tudi drugo osnovnico trapeza.

## REŠITVE

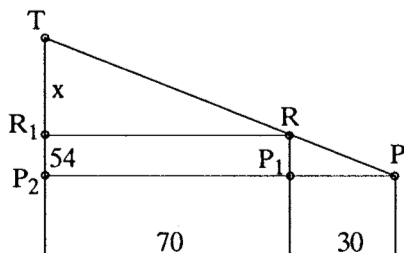
- 1.: Za podobne like velja  $a_1 : a_2 = o_1 : o_2$ ,  $4x - 3x = 25$ ,  $x = 25$ . Obsega sta 100 mm in 75 mm.
- 2.: Iz razmerij  $o_1 : o_2 = a_1 : a_2 = b_1 : b_2 = c_1 : c_2 = 2 : 5$  dobimo  $a_2 = 10$  cm,  $b_2 = 12,5$  cm in  $c_2 = 17,5$  cm.
- 3.: Trikotnika si nista podobna, ker niso vsi pari istoležečih stranic v enakem razmerju ( $3 : 9 = 6 : 18 \neq 4 : 15$ ).
- 4.: Označimo višino najnižjega topola z  $x$ .  
Iz skice sledi:  $x : (x + 3) = (x + 4) : (x + 8)$ ,  
 $x = 12$ . Topola sta visoka 12 m in 15 m.



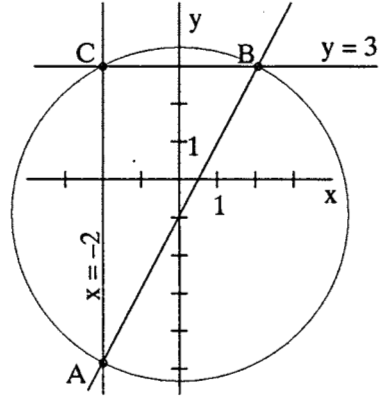
- 5.:  $\overline{BF} = \overline{AB} = 8$  cm;  $\overline{FC} = 3$  cm;  $\overline{MC} : \overline{DC} = 3 : 5$   
 $\triangle ABE$  je podoben  $\triangle MCE$ , zato  
 $\overline{MC} : \overline{AB} = \overline{EC} : \overline{EB}$ ;  $3 : 5 = \overline{EC} : (\overline{EC} + 5)$ ;  
 $\overline{EC} = 7,5$  cm;  $\overline{EF} = \overline{EC} - \overline{FC} = 4,5$  cm;  
 $p(\text{EFA}) = \frac{\overline{EF} \cdot \overline{AB}}{2} = 18 \text{ cm}^2$



- 6.: Če so T, R in P na isti premici, je  
 $\triangle TR_1R$  je podoben  $\triangle TP_2P$  in  
 $7 : 10 = x : (x + 54)$ ;  $x = 126$ .  
 Triglav bi moral biti vsaj za 126 m višji od  
 Razorja, ker je višji za 263 m, ga lahko vi-  
 dimo.



- 10.: Izračunamo koordinate presečišč premic  $A(-2, -5)$ ,  $B(2, 3)$ ,  $C(-2, 3)$  in hipotenuzo trikotnika  $h = 4\sqrt{5}e$  ter  $r = 2\sqrt{5}e$ . Ploščina lika, ki je med krožnico in trikotnikom, je  $p = 46,8e^2$



- 11.: V enačbo funkcije vstavimo:

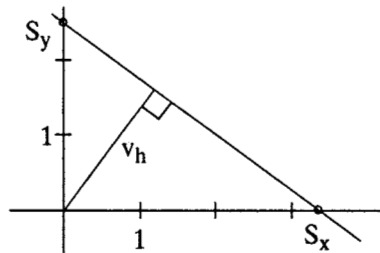
- a)  $(0, 0) \Rightarrow n = -2$   
 b)  $(0, -2) \Rightarrow n = 2,5$   
 c)  $k = 2 \Rightarrow n = 2 \pm \sqrt{2}$

- 12.: V splošno enačbo premice  $y = kx + n$  vstavimo koordinate točk A in B in dobimo:  $4 = k \cdot 0 + n$ ;  $n = 4$ ;  $-1 = k \cdot 4 + 4$ ;  $k = -\frac{5}{4}$ . Dobimo enačbo premice

$$y = -\frac{5}{4}x + 4, \text{ vanjo vstavimo } x = 6 \text{ in dobimo } y = -3,5.$$

- 13.:  $S_x(3\frac{1}{3}, 0)$ ;  $S_y(0, 2,5)$ ;  $h = \frac{25}{6}$ ,

$$v_h = \frac{k_1 \cdot k_2}{h} = 2e. \text{ Premica je oddaljena za dve enoti od izhodišča.}$$



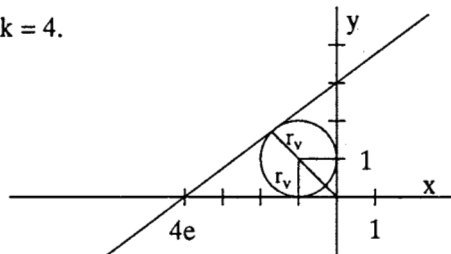
- 14.: Po Pitagorovem izreku izračunamo  $\overline{AD} = 10e$ . Obseg  $o = 28e$ , ploščina  $p = 24e^2$  in razdalja  $d(AD, BC) = \frac{p}{AD} = 2,4e$

- 15.: Začetna vrednost mora biti 3, to je pri  $k = 4$ .

$$y = \frac{3}{4}x + 3; S_x(-4, 0); S_y(0, 3); h = 5e;$$

$$v_h = 2,4e; r_v + r_v\sqrt{2} = v_h;$$

$$r_v = \frac{v_h}{1 + \sqrt{2}} \doteq 1e; p_v \doteq 3,1e^2$$



**ODNOSI MED GEOMETRIJSKIMI ELEMENTI –  
NALOGE S KOTI 30°, 45°, 60°**

1. Dan je trikotnik  $\triangle ABC$  s stranico  $\overline{AB} = 6$  cm in kotoma ob njej  $60^\circ$  in  $75^\circ$ . Izračunaj ploščino trikotnika  $\triangle ABC$ .
2. V pravokotnem trikotniku sta iz vrha pravega kota narisani simetrala kota in težiščnica. Kot med njima je  $15^\circ$ . Izračunaj notranje kote trikotnika ter obseg in ploščino, če je dolžina težiščnice 5 cm.
3. Višina na hipotenuzo deli pravi kot trikotnika v razmerju 1 : 2 in razdeli hipotenuzo na dva dela. Krajši je dolg 3 cm. Izračunaj obseg pravokotnega trikotnika.
4. Nariši enakokrak trikotnik  $ABC$  s krakom  $\overline{AC} = 5$  cm in kotom  $\sphericalangle ACB = 120^\circ$ . Nariši še simetrično ležeč trikotnik glede na nosilko kraka  $AC$ . Tako dobiš štirikotnik  $ABCB'$ . Izračunaj obseg in ploščino tega štirikotnika.
5. V krogu z danim polmerom  $r$  nariši na isti strani središča dve vzporedni tetivi, ki pripadata središčnima kotoma  $60^\circ$  in  $120^\circ$ . Izračunaj ploščino lika, ki ga določajo krajišča tetiv.
6. Koti trapeza so v razmerju 2 : 1 : 5 : 4, Manjši krak in krajša osnovnica merita po 2 cm. Izračunaj obseg in ploščino trapeza.
7. V trikotniku  $\triangle ABC$  meri kot  $\sphericalangle ABC = 60^\circ$ ,  $\overline{AC} = 14$  cm,  $\overline{BC} = 10$  cm. Izračunaj  $\overline{AB}$ .
8. Opazovalec vidi daljico  $AB$  iz točk  $C$  in  $D$ , ki sta oddaljeni 300 m, pod kotom  $30^\circ$ . Premici  $AB$  in  $BC$  sta pravokotni. Izračunaj dolžino daljice  $AB$ .
9. Nad vsako stranico pravilnega šestkotnika je načrtan kvadrat, skozi prosti oglišči kvadrata je narisana premica. Te premice zapirajo nov šestkotnik. Izrazi njegovo stranico s stranico prvotnega šestkotnika.
10. Šestkotnik je enakostranični, trije nesosednji koti so pravi koti. Izračunaj ploščino šestkotnika in določi neznane kote.
11. V trapezu merita dva notranja kota  $120^\circ$  in  $135^\circ$ , višina 6 cm in krajša osnovnica 4 cm. Izračunaj obseg in ploščino trapeza.
12. Dan je pravokotnik, v katerem je  $\overline{AB} = 2 \cdot \overline{BC}$ . Na stranici  $CD$  izberi točko  $M$  tako, da je kot  $\sphericalangle AMD$  enak kotu  $\sphericalangle AMB$ . Izračunaj velikost  $\sphericalangle AMB$  in določi ploščino pravokotnika, če je  $\overline{DM} = 1$  cm.
13. Obseg enakokrakega trapeza je 5-krat tolikšen kot krajša osnovnica, diagonala razpolavlja ostri kot trapeza. Izračunaj velikost kotov.



67. V vseh sadovnjakih so nabrali 225 ton sadja, drugo leto je bil pridelek za 40% večji. V prvem sadovnjaku se je pridelek povečal za 25%, v drugem za 50%. Koliko ton sadja je zraslo v vsakem sadovnjaku prvo leto?
68. Pri množenju dveh števil je učenec namesto 4 enice napisal 1 in namesto produkta 600 dobil 525. Kateri številki je množil?
69. Razdaljo med A in B prevozi vlak v 23 urah, in sicer polovico s hitrostjo 80 km/h, tretjino s 60 km/h, ostanek poti pa s 40 km/h. Izračunaj razdaljo med A in B.
70. Katerega leta 20. stoletja je bil rojen človek, ki je leta 1977 imel toliko let, kot je vsota števk letnice njegovega rojstva?
71. Tretjino blaga prodaja trgovina z 10% dobičkom, četrtno s 15% dobičkom, ostanek s 5% izgubo. Izračunaj nabavno ceno blaga, če je pri njegovi prodaji trgovina zaslužila 2400 SIT.
72. V kvadratu nariši največji možni kvadrat, ki ima stranice nagnjene za kot  $60^\circ$  glede na stranice prvotnega kvadrata. Koliko % prvotnega kvadrata pokriva včrtani kvadrat?
73. Traktorji bi morali dnevno preorati 112 hektarov. Ker pa so vsak dan preorali 8 hektarov več, so dva dni pred predvidenim koncem oranja imeli le še 176 hektarov nepreoranega polja. Koliko časa je bilo predvidenega za oranje?
74. V enakostranični trikotnik z dano stranico  $a$  so včrtane tri enake krožnice tako, da se vsaka dotika dveh stranic trikotnika in ostalih dveh krožnic. Izrazi polmer včrtanih krožnic s stranico trikotnika.
75. Kolikšna mora biti stranica enakostraničnega trikotnika, da je obseg številčno enak ploščini trikotnika?
76. Dan je kvadrat s stranico  $a$ . Na stranicah kvadrata so točke K, L, M, N tako, da velja:  $\overline{AK} = \frac{2}{3} \overline{AB}$ ,  $\overline{BL} = \frac{2}{3} \overline{BC}$ ;  $\overline{CM} = \frac{2}{3} \overline{CD}$  in  $\overline{DN} = \frac{2}{3} \overline{DA}$ . Kolikšna je ploščina lika, ki ga omejujejo nosilke daljic AL, BM, CN in DK?
77. V trapezu ABCD je točka K središče kraka AD. Dokaži, da je ploščina trikotnika  $\triangle KBC$  dvakrat manjša od ploščine trapeza.
78. Dokaži, da je v paralelogramu vsota kvadratov diagonal enaka vsoti kvadratov stranic.
79. Od trenutka, ko je v tunel zapeljala lokomotiva, do takrat, ko je vanj zapeljal zadnji vagon, je minilo 12 sek; do trenutka, ko je še zadnji vagon odpeljal iz tunela, je minilo še pol min. Izračunaj dolžino vlaka in njegovo hitrost, če je tunel dolg 300 m.
80. Obseg enakokrakega trikotnika je 50 cm. Na krak BC je narisana težiščnica AD. Določi dolžine stranic trikotnika ABC, če je obseg  $\triangle ACD$  za 4 cm večji kot obseg  $\triangle ABD$ .